



**UNCUYO**  
UNIVERSIDAD  
NACIONAL DE CUYO



**FACULTAD  
DE INGENIERÍA**

DOCTORADO EN INGENIERÍA

**MODELACIÓN, IDENTIFICACIÓN Y  
CONTROL DE SISTEMAS ROBÓTICOS  
EN ENTORNOS NO ESTRUCTURADOS**

**FRANCISCO GUIDO ROSSOMANDO**  
TESIS DOCTORAL

Director: Dr. Ing. Gustavo Juan Eduardo Scaglia

Codirector: Dr. Ing. Mario Emanuel Serrano

Mendoza, mayo de 2023

## Índice general

Dedicatoria	III
Resumen	IV
Abstract	V
Lista de acrónimos	VI
Lista de variables	VII
Índice de contenido	XI
Referencias	122
Apéndice I: Control Basado en el Espacio Nulo	129

## **Dedicatoria**

A mis hijos, Francisco David e Isabella y a mi esposa Valeria, que me apoyaron en todo momento para la culminación de esta Tesis.

A mis directores Prof. Dr. Gustavo Scaglia y Prof. Dr. Emanuel Serrano que colaboraron y ayudaron en la formalización de la tarea de investigación.

Al profesor Dr. Jose Denti Filho que me abrió las puertas a la carrera académica.

Y a mi abuela Concepción que me acompaña desde el Cielo.

**Palabras Clave:** Robótica, redes neuronales artificiales, identificación, control adaptable, control no lineal

## **Resumen**

El desarrollo de los vehículos autónomos está configurando el futuro del transporte. Los controladores de movimiento de alto rendimiento son necesarios para desplegar la tecnología para seguimiento de trayectorias en una amplia condición de entornos y con robustez para distintos tipos de perturbaciones.

El vehículo autónomo se caracteriza por una conexión *inteligente* entre las operaciones de navegación y acción, que define su comportamiento y le permite llegar a la consecución de los objetivos programados (en este caso el seguimiento de trayectorias) con características del vehículo que poseen cierto grado de incertidumbre.

Esta tesis aborda el seguimiento de trayectorias para vehículos autónomos con el objetivo de desarrollar un controlador inteligente inmune a las perturbaciones externas y dinámicas no modeladas acotadas. La tarea se dividió en el modelado de los distintos tipos vehículos considerados, robots móviles, vehículos aéreos autónomos y navíos, cuyo modelo se dividió en la cinemática y dinámica del vehículo, donde la estrategia de control se basa en modelos y control inteligente.

En la primera parte de la tesis, presentamos los preliminares teóricos y revisamos las diferentes técnicas de control no lineal y control inteligente, siendo el campo de aplicación en sistemas no lineales complejos para los que los métodos de la teoría de control lineal no son aplicables. Esta técnica es idónea para la identificación de los parámetros de control, ya que el control inteligente puede permitir una identificación de parámetros en casos donde la estructura de la ley de control está dada pero los parámetros o parte de su dinámica son desconocidos.

En la segunda parte de la tesis, descomponemos el problema de control de cada uno de los vehículos considerados en controladores cinemáticos y dinámicos basados en los modelos de cada uno de ellos. Siendo la principal contribución de la tesis la formulación de los controladores de seguimiento de trayectorias minimizando del error de seguimiento de trayectorias, lo que permite un enfoque de diseño unificado utilizando métodos de espacio de estados. En particular, comparamos el rendimiento de las estrategias de control basadas en Control adaptable basado en regresores (Adaptive Control) y control neuronal adaptable utilizando superficies deslizantes (NA-SMC), y analizamos la estructura del control basado en álgebra lineal (LABC), estableciendo el vínculo entre los trabajos basados en el diseño de control clásico y los recientes enfoques basados en el control inteligente.

En esta parte de la tesis también se presentan los resultados de las pruebas realizadas en distintos entornos, como también la simulación de diferentes tipos de vehículos con variaciones de su dinámica y la acción de dinámicas no modeladas. Donde la verificación de la viabilidad de las diferentes estrategias de control es demostrada a través de resultados de simulación como de experimentos según sea el caso.

## Abstract

The development of autonomous vehicles is shaping the future of transportation. High-performance motion controllers are needed to deploy the technology for trajectory tracking in a wide range of environments and with robustness to different types of disturbances.

The autonomous vehicle is characterized by an intelligent connection between navigation and action operations, which defines its behavior and allows it to reach the achievement of programmed goals (in this case trajectory tracking) with vehicle characteristics that possess a certain degree of uncertainty.

This thesis addresses trajectory tracking for autonomous vehicles with the objective of developing an intelligent controller immune to external disturbances and bounded unmodeled dynamics. The task was divided into the modeling of the different types of vehicles considered, mobile robots, autonomous aerial vehicles and ships, whose model was divided into vehicle kinematics and dynamics, where the control strategy is based on models and intelligent control.

In the first part of the thesis, the theoretical preliminaries are presented, and the different techniques of nonlinear control and intelligent control are reviewed, being the field of application in complex nonlinear systems for which the methods of linear control theory are not applicable. This technique is suitable for the identification of control parameters since intelligent control can allow the identification of parameters in cases where the structure of the control law is given but the parameters or part of its dynamics are unknown.

In the second part of the thesis, the control problem of each of the vehicles considered is decomposed into kinematic and dynamic controllers based on the models of each of them. The main contribution of the thesis is the formulation of the trajectory tracking controllers by minimizing the trajectory tracking error, which allows a unified design approach using state space methods. In particular, we compare the performance of control strategies based on Adaptive Control based on regressors (Adaptive Control) and adaptive neural control using sliding surfaces (NA-SMC) and analyze the structure of linear algebra-based control (LABC), establishing the link between works based on classical control design and recent approaches based on intelligent control.

This part of the thesis also presents the results of tests performed in different environments, as well as the simulation of different types of vehicles with variations of their dynamics and the action of non-modeled dynamics. Where the verification of the feasibility of the different control strategies is demonstrated through simulation results as well as experiments as the case may be.

## Lista de acrónimos

UAV Unmanned Aerial Vehicle *vehículos aéreos no tripulados*  
UGV Unmanned Ground Vehicle *vehículos terrestres no tripulados*  
USV *Unmanned surface vessel* *vehículos marinos no tripulados*  
WMR Wheeled Mobile Robot Robot móvil sobre ruedas  
MIMO Multi Input – Multi output  
SISO Single Input – Single Output  
PI Controlador Proporcional Integral  
PD Controlador Proporcional Derivativo  
PID Controlador Proporcional Integral Derivativo  
SMC Sliding mode control Control de Modo deslizante  
LABC Linear Algebra Based Control – Control basado en Algebra Lineal  
RNA Redes neuronales Artificiales  
MLP Multi Layer Perceptron Perceptron Multicapa  
RBF red neuronal función de base radial  
GRNN red neuronal de regresión generalizada  
IAE Integral del Error Absoluto  
PWM Modulación por ancho de pulso  
ECPD Embedded controller plus outer PD control loop - Controlador Embebido mas control PD  
AMRC Adaptive model regressor control scheme - Esquema de control de modelo regressor adaptativo  
ANNC Adaptive neural network controller - Controlador de red neuronal adaptable  
ANSMC Adaptive Neural SMC  
RMS Root Mean Square

## Lista de variables

Variable	Descripción:
$v$	Velocidad lineal del robot móvil
$\omega$	Velocidad angular del robot móvil
$v_{ref}$	Referencia de velocidad lineal
$\omega_{ref}$	Referencia de velocidad angular
$x, y$	Coordenadas cartesianas del robot móvil en el plano XY posición
$\mathbf{x}$	Vector de velocidades de salida Robot $\mathbf{x} = (v, \omega)^T$ , Navio $\mathbf{x} = (u, r)^T$
$\mathbf{y}$	Vector de posición del robot móvil $(x, y)$ .
$\mathbf{x}^w$	Posición UAV respecto del referencial fijo $\mathbf{x}^w = (x \ y \ z \ \psi)^T$
$G$	Centro de masas del robot móvil
$c$	Posición de la rueda castor
$a$	Distancia del eje de las ruedas con respecto al centro de masas
$\vartheta_i$	Parámetros del modelo dinámico del robot móvil $i = 1, 2, \dots, 6$
$\boldsymbol{\vartheta}$	Vector de parámetros del Robot móvil
$\alpha$	Orientación del robot móvil.
$\mathbf{h}(\mathbf{x})$	Vector de campos escalares suaves en $\mathbb{R}^{2 \times 1}$ (modelo cinemático del robot móvil)
$\tilde{\mathbf{h}}(\mathbf{x})$	Vector de perturbaciones y cinemática no modelada
$\mathbf{f}(\mathbf{x})$	Campo vectorial suave en $\mathbb{R}^{2 \times 1}$ (modelo dinámico de robot móvil)
$\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$	Vector de perturbaciones y dinámica no modelada
$\mathbf{g}(\mathbf{x})$	Matriz de funciones de entrada
$\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x})$	Matriz de variaciones dinámicas de la matriz de entrada
$\mathbf{w}^*$	Matriz de pesos óptimos asociados a la función RBF para identificar $\mathbf{f}(\mathbf{x})$
$\hat{\mathbf{w}}$	Matriz de pesos estimados
$\tilde{\mathbf{w}}$	Matriz de error de pesos $\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{w}^* - \hat{\mathbf{w}}$
$\mathbf{W}^*$	Matriz de pesos óptimos asociados a la función RBF para identificar $\mathbf{g}(\mathbf{x})$
$\hat{\mathbf{W}}$	Matriz de pesos estimados
$\tilde{\mathbf{W}}$	Matriz de error de pesos $\tilde{\mathbf{W}} = \mathbf{W}^* - \hat{\mathbf{W}}$
$\boldsymbol{\omega}^*$	Matriz de pesos óptimos asociados a la función RBF para identificar $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{x})$
$\hat{\boldsymbol{\omega}}$	Matriz de pesos estimados
$\tilde{\boldsymbol{\omega}}$	Matriz de error de pesos $\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega}^* - \hat{\boldsymbol{\omega}}$
$\varphi_j^*$	Neurona RBF con parámetros óptimos (centros y anchos)
$\boldsymbol{\varphi}^*(.)$	Vector de neuronas rbf con parámetros optimo
$\mathbf{c}_j^*$	Vector de centros óptimos de cada neurona $j$
$\mathbf{c}^*$	Vector de centros óptimos del vector de funciones rbf
$\sigma_j^*$	Apertura de cada neurona RBF

$\sigma^*$	Vector que contiene todos los valores de apertura del vector de neuronas
$L_f h_i(\mathbf{x}), L_{g_j} h_i(\mathbf{x})$	Derivadas de Lie del sistema entrada-salida del robot móvil
$\Delta L_f h_i(\mathbf{x}), \Delta L_{g_j} h_i(\mathbf{x})$	Derivadas de Lie correspondientes a las variaciones dinámicas y cinemáticas del robot móvil.
$\hat{\mathbf{v}}_N(t)$	Vector de estimación neuronal
$\mathbf{e}$	Error de velocidad
$\mathbf{S}$	Superficie de deslizamiento
$\lambda_{x,y}$	Ganancia del error
$\Gamma_i$	Ganancia asociada a la función signo
$t$	Tiempo (dominio continuo)
$t_s$	Tiempo necesario para alcanzar la sup de deslizamiento
$\varrho$	Variable auxiliar
$\delta$	Vector de variaciones dinámicas
$\lambda_{\min}(\cdot)$	Operador que indica el autovalor mínimo de una matriz diagonal.
$A:$	Matriz de transición de estados de un sistema lineal
$C:$	Matriz de salidas de un sistema lineal
$B$ o $b:$	Matriz de entrada de un sistema lineal
$V$	función candidata de Lyapunov
$k_i$	constantes utilizadas en la definición de estabilidad $i = 1,2,3$
$\alpha_i$	funciones de clase $\mathcal{K}$ $i = 1,2$
$B_r$	espacio utilizado en la definición de estabilidad
$\mathcal{F}(x)$	función definida positiva
$\mathbf{E}(x)$	matriz de desacoplamiento del sistema MIMO ( $m \times m$ )
$r$	grado relativo
$D, D_0$	dominios de una función
$S(\mathbf{x})$	superficie de deslizamiento
$\lambda_i$	constante asociada a la superficie de deslizamiento
$\Phi(\mathbf{x})$	campo que proyecta el sistema $f(\mathbf{x})$ sobre la superficie de deslizamiento
$u^+$ o $u^-$	suprándice (sobre $u$ o $f$ ) que indica valor creciente o decreciente
$\mu$	valor que regula el campo de velocidad de los estados sea tangente a la superficie en un punto considerado
$y_{ref}$	señal de referencia de salida
$u_{eq}$	acción de control equivalente
$O(\cdot)$	términos de orden superior
$\varepsilon$	error de aproximación de la red neuronal
$\bar{\varepsilon}$	cota máxima del error de aproximación de la red neuronal
$\mathbf{P}$	Matriz diagonal con elementos positivos definida por el diseñador
$\mathbf{Q}$	Matriz utilizada en el análisis de estabilidad de Lyapunov
$\Lambda$	matriz diagonal con valores constantes $\lambda$
$\mathbf{M}$	matriz de inercias
$\mathcal{C}(\cdot)$	matriz de Coriolis

$D$	matriz de fricción (hidrodinámica o aerodinámica, según el caso)
$tr(.)$	Operador traza
$b_i$	constantes de diseño $i = 1,2,3,4,5$
$\eta$	Actitud del Cuadricóptero $[\phi \theta \psi]^T$
$\phi$	ángulo de balanceo (Roll)
$\theta$	ángulo de cabeceo (pitch)
$\psi$	ángulo de guiñada (yaw)
$T(\psi)$	es una matriz de transformación
$K_u$	matriz diagonal de entrada al modelo reducido del Cuadricóptero
$K_v$	matriz diagonal de estados del modelo reducido del Cuadricóptero
$\Delta H_c$	derivada parcial de la matriz $H$ con respecto al vector $c$
$\Delta H_\sigma$	derivada parcial de la matriz $H$ con respecto al vector $\sigma$
$K_p$	matriz diagonal de ganancias proporcionales
$K_d$	matriz diagonal de ganancias derivativas
$F(t)$	fuerza de empuje proporcionado por los rotores
$I_{xx}$	inercia con respecto al eje X
$I_{yy}$	inercia con respecto al eje y
$I_{zz}$	inercia con respecto al eje Z
$k_f$	constante de fuerza del rotor
$k_m$	constante de par del rotor
$\ell$	longitud del cable
$m$	masa del cuadricóptero
$q$	vector de configuración del sistema cinemático de formación $(\mathbf{x}_1^w \ \psi_1^w \ \mathbf{x}_2^w \ \psi_2^w)^T$
$\xi_{o,i}^w$	posición del $i$ – ésimo obstáculo. $(x_{o,i}^{w*} \ y_{o,i}^{w*} \ z_{o,i}^{w*})^T$
$\xi_\ell^w$	posición de la carga útil $(x_\ell^w \ y_\ell^w \ z_\ell^w)^T$
$d$	distancia entre los dos vehículos aéreos no tripulados $\ \mathbf{x}_1^w - \mathbf{x}_2^w\ $
$\gamma_1$	ángulo de elevación $asen((z_2^w - z_1^w)/d)$
$\gamma_2$	orientación de guiñada de la formación $atan((y_2^w - y_1^w, x_2^w - x_1^w))$
$\mathcal{V}$	potencial artificial positivo utilizada en la evasión de obstáculos
$E_v$	Vector error velocidad del modelo cinemático de formación UAV
$X_{ref}$	Referencia de velocidad de la formación
$X$	Velocidad de la formación
$J_1$	es el jacobiano de la tarea $J_1(q)$
$a_1$	es un valor residual
$J_2$	es el jacobiano de la tarea $J_2(q)$
$a_1$	es un valor residual
$J_1^\dagger$	matriz pseudoinversa de $J_1$

$\xi$	vector de variables independiente de tareas $(x_\ell^w \ y_\ell^w \ z_\ell^w \ d \ \gamma_1 \ \gamma_2 \ \psi_1^w \ \psi_2^w)^T$
$\mathbf{v}_c$	vector de velocidades de referencia calculadas
$\mathbf{v}_x$	Variable auxiliar para calculo de $\mathbf{v}_c$

## Índice de contenido

<b>Capítulo 1. Introducción:</b> .....	<b>1</b>
1.1. Definición y Clasificación de Vehículos Autónomos .....	4
1.1.1. Vehículos aéreos no tripulados (UAV). .....	5
1.1.2. Vehículos Terrestres no tripulados (UGV).....	6
1.1.3. Vehículos de Superficie no tripulados (USV). .....	7
1.1.4. Vehículos Submarinos no tripulados (UUV).....	8
1.2. Hipótesis .....	9
1.3. Objetivo General: .....	9
1.4. Objetivos Específicos: .....	9
1.5. Justificación .....	10
1.6. Contribuciones de la tesis. ....	10
1.7. Marco de realización. ....	11
1.8. Estructura de la tesis. ....	12
<b>Capítulo 2. Preliminares Teóricos</b> .....	<b>14</b>
2.1. Introducción:.....	14
2.2. Fundamentos de Sistemas No lineales: .....	15
2.3. Propiedades Fundamentales: .....	16
2.4. Conceptos de estabilidad: .....	16
2.5. Lema de Barbalat.....	18
2.6. Acotamiento y acotación final.....	19
2.7. Linealización por realimentación: .....	20
2.8. Control por Modo Deslizante (SMC) .....	22
2.8.1. Descripción matemática: .....	23
2.8.2. Condiciones de existencia, invarianza y transversalidad.....	24
2.8.3. Dinámica del plano deslizante .....	25
2.8.4. Método de Filippov .....	25
2.8.5. Control equivalente .....	27
2.8.6. Robustez ante perturbaciones .....	30
2.8.7. Elección de la superficie deslizante.....	31
2.9. Redes Neuronales Artificiales (RNA) .....	32
2.9.1. Red Neuronal MLP.....	33
2.9.2. Funciones de activación: .....	34

2.9.3.	Red Neuronal RBF .....	35
2.9.4.	Red Neuronal GRNN .....	36
2.9.5.	Propiedad universal de aproximación de funciones .....	37
2.10.	Identificación de sistemas utilizando redes neuronales artificiales .....	37
2.10.1.	Identificación de sistemas SISO .....	38
2.10.2.	Identificación de Sistemas MIMO.....	40
<b>Capítulo 3. Controlador neuro-adaptable de modo deslizante para seguimiento de trayectorias en robots móviles .....</b>		<b>44</b>
3.1.	Resumen. ....	44
3.2.	Modelo del Robot: .....	44
3.3.	Diseño del controlador cinemático. ....	45
3.4.	Formulación del problema:.....	47
3.5.	Diseño del controlador SMC .....	48
3.6.	Sistema neuronal adaptativo y leyes de ajuste en tiempo discreto .....	50
3.7.	Resultados experimentales .....	55
3.8.	Observación final.....	59
<b>Capítulo 4. Control de un vehículo marino usando compensación neuro adaptable basada en Superficies deslizantes. ....</b>		<b>60</b>
4.1.	Resumen del Capitulo.....	60
4.2.	Descripción del Modelo del Buque: .....	60
4.3.	Desarrollo del controlador basado en algebra lineal .....	61
4.4.	Compensación basada en Superficies deslizantes .....	64
4.5.	Resultados de Simulación Y Discusión.....	68
4.5.1.	Seguimiento de trayectoria de filas .....	70
4.5.2.	Discusión de resultados .....	72
4.6.	Observaciones finales .....	73
<b>Capítulo 5. Control adaptable para seguimiento de trayectorias en Cuadricópteros con perturbaciones mediante el uso de Redes neuronales de regresión generalizada. ....</b>		<b>74</b>
5.1.	Resumen del Capitulo.....	74
5.2.	Modelo Dinámico del Cuadricóptero .....	74
5.3.	Controlador para rechazo de perturbaciones (bucle de control externo).....	79
5.4.	Resultados Experimentales.....	87
<b>5.5.</b>	<b>Validación Experimental .....</b>	<b>91</b>
5.6.	Observaciones finales .....	99

<b>Capítulo 6. Transporte aéreo de cargas con múltiples Cuadricópteros basado en un controlador cinemático y un SMC neuronal de compensación dinámica.....</b>	<b>101</b>
6.1. Resumen del Capitulo.....	101
6.2. Formulación del Problema: .....	101
6.3. Modelo dinámico del Cuadricóptero: .....	104
6.4. Control neuronal adaptativo en modo deslizante NA-SMC.....	106
6.5. Controlador Propuesto.....	108
6.6. Análisis de convergencia y ley de ajuste neuronal .....	110
6.7. Simulación Numérica .....	111
6.8. Resultados de simulación: .....	112
6.9. Observaciones finales .....	118
<b>Capítulo 7. Conclusiones de la Tesis.....</b>	<b>119</b>
7.1. Trabajos futuros .....	119
7.2. Difusión de los principales aportes de esta tesis .....	120

## Capítulo 1. Introducción:

La *robótica* representa un campo de aplicación importante para los Sistemas de Control, ya que ha generado un creciente impacto en la industria manufacturera y, más recientemente, en la agroindustria y el sector de servicios. Esta plantea el desarrollo de autómatas con altos niveles de destreza y autonomía de movimiento y/o manipulación, lo cual permite su aplicación en sistemas de producción altamente automatizados, tareas y servicios o auxilios en lugares de difícil acceso y ambientes contaminados o riesgosos. Estas aplicaciones han generado un impacto económico y social positivo en los países que las desarrollan.

La robótica es un concepto muy amplio que abarca la creación, la planificación y la programación de robots. Los robots están en contacto directo con el mundo físico y, a menudo, se utilizan para llevar a cabo tareas monótonas y repetitivas, sustituyendo a las personas. Los robots pueden clasificarse en función de su tamaño, su ámbito de aplicación o su finalidad. Donde este trabajo de investigación tratara la problemática de la navegación autónoma vehículos autónomos y robots móviles.

Conforme se van generando nuevas ideas para solucionar cualquiera de las áreas de la navegación autónoma, los algoritmos que las resuelven son cada vez más complejos, o al menos necesitados de una carga computacional mayor. Si bien la tecnología electrónica ha avanzado a la par de estas investigaciones, proporcionando plataformas de ejecución cada vez más potentes, la solución suele resultar cada vez más tediosa y más restringida a unas condiciones de trabajo específicas.

Un sistema robótico lo constituye un determinado tipo de robot, el cual consta de diferentes componentes que forman un sistema. Donde el robot se puede describir como la síntesis de varios subsistemas, entre los que destacan:

- Sistema sensorial, compuesto por los sensores que recogen información acerca del estado del propio robot y de su entorno;
- Sistema de accionamiento, compuesto por los elementos actuadores (motores, por ejemplo) que permiten llevar a cabo las acciones programadas;
- Unidad de control, formada por los elementos computacionales y el software que regulan el comportamiento global del robot.

Además, a los anteriores se debe añadir:

- Los elementos estructurales, que confieren rigidez y estabilidad al robot.
- Los elementos de transmisión y conversión del movimiento. Cambios en el eje o la dirección de rotación, ampliación/reducción de velocidad, etc.
- Los elementos terminales, según la aplicación a la que se destine al robot (pinzas, electrodos de soldadura, inyectoras de pintura, etc.).
- Los dispositivos auxiliares de entrada/salida, que permiten la comunicación del usuario con la unidad de control.
- Los subsistemas de alimentación, de tipo eléctrico, neumático o hidráulico.

El sistema robótico se puede analizar de lo general a lo particular utilizando el análisis sistemático. El primer paso es considerar al sistema como una "caja negra", no sabemos qué hay en su interior, pero podemos identificar la entrada y salida de dicho sistema. La

entrada genuina al robot está constituida por las órdenes humanas; la salida está constituida por la ejecución de diversas tareas realizadas en forma autónoma.

Entre los diferentes sistemas robóticos se pueden considerar los sistemas robóticos terrestres (UGV Robot Móvil del tipo no-holonómico, car-like, etc.), sistemas robóticos aéreos (UAV multirrotor y de alas fijas), vehículos marinos (navios, aerodeslizadores).

En el caso de la *robótica móvil terrestre* ha sido desde hace varios años una temática importante en distintos trabajos de investigación en general, y como también de tesis doctorales en particular. Gracias a estos trabajos, se han realizado avances en diversas tareas como son: mapeo del entorno, navegación, generación de trayectorias y caminos, detección, evasión e incluso caracterización de obstáculos. Sin embargo, no existe aún una solución general para el problema de la robótica móvil. Para cada entorno hay una solución específica; según el grado de autonomía que se le desee conceder al robot, el procedimiento es diferente; y para cada tarea particular a resolver también hay múltiples soluciones, cada una con sus puntos a favor y en contra.

Dependiendo de la estrategia de control utilizada se puede dar solución a determinadas problemáticas, Por ej. los trabajos presentados por *Rossomando* ([29],[30],[31]) muestran la aplicación de redes neuronales artificiales en robots móviles. Estos trabajos se centran en el control neuronal adaptable, donde la red neuronal compensa la diferencia de la dinámica nominal (con que fue ajustado el controlador) con la dinámica real del robot, de esta forma reduciendo el error de control en el seguimiento de trayectorias producidas por las posibles variaciones en la dinámica del robot.

En otro trabajo, *Rossomando* [33] propone una metodología para controlar sistemas robóticos para que estos puedan seguir una trayectoria preestablecida. Para lograr el objetivo se utiliza una red neuronal artificial para diseñar un control adaptable que se ajusta a la dinámica real del robot y con el uso de un control por superficie deslizante elimina el error de aproximación introducida por la red neuronal. La ventaja de esta técnica de control es que está totalmente diseñada en tiempo discreto lo que posibilita la implementación directa en PC y controladores digitales, reduciendo los posibles problemas de inestabilidad introducidos por el diseño de controladores en el dominio continuo y su posterior implementación en medios digitales. Este método puede ser aplicado a sistemas que son lineales o no lineales, variantes o invariantes en el tiempo. La estructura de control propuesta es simple y aceptablemente robusta con respecto a las incertidumbres del modelo conocido. En Scaglia et al. [36] se presenta el diseño de controladores basado en álgebra lineal aplicado a robots móviles considerando incertidumbre aditiva, en donde se puede ver que se disminuye considerablemente el error de seguimiento frente a perturbaciones externas y a incertidumbre paramétricas y estructuradas sin incrementar la complejidad de los algoritmos de control. En otro trabajo realizado por *Rosales et al.* [24] muestra la practicidad y funcionalidad de la utilización del álgebra lineal y los métodos numéricos en el diseño de controladores para sistemas no lineales y para sistemas robóticos móviles. Una de las ideas principales de esta propuesta es plantear una aproximación del sistema robótico utilizando métodos numéricos, y a partir de allí, encontrar las “mejores” acciones de control que lleven al sistema del estado actual al estado deseado (*Scaglia et al.* [34][35] [37]), (*Serrano, Scaglia et al.* [39][40][41][42][43]), (*Rosales, Scaglia et al.* [24]),

En el caso de los *vehículos aéreos no tripulados (UAV)*, la cual es un área de investigación activa que ha tenido un desarrollo importante en los últimos años, debido a la ventaja que presenta cuando las áreas de trabajo son amplias o se requiere un acceso sin contacto con el suelo. Cuando se coordinan tareas entre estos y algún vehículo terrestre se pueden

realizar muchas acciones con mayor eficiencia, tales como tareas de agricultura de precisión, mantenimiento de infraestructuras (mantenimiento de líneas de transmisión, operación de vigilancias de rutas, operaciones militares de reconocimiento, etc.). Dentro de los UAV's encontramos a los multirrotor, estos son sistemas inestables, no-lineales, multivariables, de dinámica compleja y altamente acoplada (*Vepa*. [48]), pero son robots aéreos capaces de navegar, estabilizarse en posiciones definidas y aterrizar en ambientes de pequeñas dimensiones, por ejemplo, laboratorios, galpones, entre otros (*Shima et al.*[46]). Estas características permiten realizar numerosas tareas de una manera más efectiva e impactando positivamente donde se apliquen. Inclusive existen estrategias de control aplicadas en la industria en la cuales se obtuvieron resultados satisfactorios, siendo el caso de *Rosales et. al.* [26], donde utilizo un control PID adaptable junto con una red neuronal para identificar el modelo y retropropagar el error de control, el cual es aplicado a un UAV cuatrirrotor para el seguimiento de trayectorias.

En el caso de los *vehículos marinos autónomos*. Son aquellos que están diseñados especialmente para cumplir funciones en distintas masas de agua ya sean lagos, mares u océanos; que sirven de gran ayuda para los exploradores de petróleo, arqueólogos marinos y también investigación oceanográfica; de la misma manera, para los *USV (underactuated surface vessel)*, donde la estabilización y control de seguimiento de la posición y orientación de estos sistemas han recibido considerable atención de la comunidad de control. El reto de estos problemas se debe al hecho de que el movimiento de la nave es subactuado ya que posee tres grados de libertad la posición en  $y$ , posición en  $x$  y ángulo de rotación, mientras que sólo hay dos acciones de control disponibles la fuerza de control de velocidad (*surge*) y el momento de rotación (*yaw*). Particularmente los problemas de seguimiento de trayectoria han recibido gran atención de la literatura en los últimos tiempos; ver *Jiang & Nijmeijer* [20] y *Godhavn et al.* [19], incluidas sus referencias. El uso de seguimiento de trayectoria para un sistema de navegación se justifica en áreas de trabajo estructuradas, así como en espacios de trabajo parcialmente estructurados, donde obstáculos inesperados se pueden presentar durante la navegación. En el primer caso, la trayectoria de referencia se puede establecer a partir de un planificador de trayectoria global. En el segundo caso, los algoritmos utilizados para evitar obstáculos generalmente vuelven a planear la trayectoria a fin de evitar una colisión, generando así una trayectoria de referencia nueva.

El objetivo es encontrar las acciones de control que combinadas resultan en el seguimiento de la trayectoria de referencia ( $x_{ref}, y_{ref}$ ). En este trabajo, un controlador diseñado originalmente para sistemas robóticos (*Serrano et al.* [41]; *Zheng & Sun* [51]), se aplica a un buque marino subactuado. Donde Serrano et al. [41] propone un algoritmo de control cuya originalidad está basada en la aplicación de técnicas de control basadas en Álgebra lineal. Este simple pero preciso aprovechamiento sugiere que, conociendo el valor del estado deseado, se puede encontrar un valor de las acciones de control que fuerzan al sistema a moverse del estado actual al deseado.

En *Do et. al.* [16], los autores propusieron un único controlador, llamado controlador universal, que resolvió la estabilización y el seguimiento simultáneamente. En *Wongkem et. al.* [49] se propuso un esquema de observador-controlador para rastrear una trayectoria en tiempo real utilizando las mediciones de posición y rumbo del navío autónomo.

Sobre la base del método directo y el esquema de pasividad de Lyapunov, *Jiang* [21] propuso dos soluciones de seguimiento constructivo para el barco subestimado. Sin embargo, tanto Jiang como *Do et al.* [21] impuso que la velocidad de guiñada (*yaw*) fuese distinta de cero.

*Ghommam et al.* [18] consideró el problema de controlar la posición del plano y la orientación de una embarcación de superficie autónoma utilizando dos propulsores laterales independientes. Se introducen dos transformaciones para representar el sistema en una forma pura en cascada.

Luego se emplea un enfoque discontinuo para la estabilización del sistema de forma encadenada a través de una retroalimentación de estado parcial. En *Bao-Li* [15], se obtuvo un controlador basado en el método directo y la técnica de refuerzo de Lyapunov. Una estrategia de control similar, que también se basa en el retroceso y la síntesis de Lyapunov, se propuso en *Tee & Ge* [47]. Los autores consideran el problema de rastrear una trayectoria deseada para embarcaciones oceánicas completamente activadas, en presencia de incertidumbres y disturbios desconocidos. Ideas similares también fueron encontradas en *Yu et. al.* [50], se presentó un controlador de modo deslizante dinámico adaptable basado en el método de backstepping y la teoría de control de modo deslizante dinámico. *Lapierre y Jouvencel* [22] presentaron un controlador robusto no lineal diseñado para conducir un vehículo autónomo bajo el agua en un camino predefinido a una velocidad constante hacia adelante. En la mayoría de las técnicas basadas en backstepping existentes, una suposición muy restrictiva es que la velocidad de referencia de guiñada debe satisfacer condiciones de excitación persistentes y, por lo tanto, no converge a cero. En consecuencia, un barco tendría problemas en rastrear trayectorias de referencia en línea recta, lo que hace que no sea una situación deseable.

Para resolver los problemas planteados en sistemas robóticos, se utilizarán técnicas del Control No-lineal, Control Adaptable, Álgebra Lineal y técnicas basadas en redes neuronales desarrolladas en el grupo de trabajo y que deberán conducir a algoritmos estables y eficientes. También se aplicaron algoritmos de control teniendo en cuenta la incertidumbre estructurada como no estructurada en sistemas robóticos (*Scaglia et al* [34] [36]), considerando también saturación en las acciones de control (*Serrano, Scaglia et al*, [43],[42]). Y como también pueden contemplar la acción de perturbaciones y dinámicas no modeladas que pueden afectar la estrategia de control *Rossomando* ([29]- [33]). Y más recientemente el empleo de una red neuronal convolucional profunda (CNN) la cual ha demostrado un rendimiento extraordinario en la extracción y expresión de la correlación de los estados inherentes en el espacio de estado de alta dimensión *LeCun et. al* (2015) [23], *Schmidhuber* (2015)[45]. Esta tesis pretende explotar el diseño y la aplicación de inteligencia artificial y para construir un modelo no lineal aplicado al control de diferentes vehículos autónomos, tanto terrestres, marinos y aéreos, que describa el comportamiento dinámico incluyendo las incertidumbres inherentes del mismo, y que permita el seguimiento de trayectorias con el menor error posible.

### 1.1. Definición y Clasificación de Vehículos Autónomos

Un sistema no tripulado (Unmanned System - US) o vehículo no tripulado (Unmanned Vehicle - UV) puede definirse como un "sistema electromecánico, sin operador humano a bordo, que es capaz de ejercer su poder para realizar las misiones diseñadas" [1].

Los UV pueden ser controlados a distancia (por un piloto remoto) o pueden navegar de forma autónoma basándose en planes preprogramados o en sistemas de automatización dinámica más complejos [2]. Incluyen vehículos que se mueven en el aire (vehículos o sistemas aéreos no tripulados-UAV, UAS, comúnmente conocidos como "drones"), en el suelo (vehículos terrestres no tripulados-UGV), en la superficie del mar (vehículos de

superficie no tripulados-USV) o en la columna de agua (vehículos submarinos no tripulados-UUV), descritos brevemente en las siguientes subsecciones.

### 1.1.1. Vehículos aéreos no tripulados (UAV).

Los vehículos aéreos no tripulados, también llamados drones, son sistemas no tripulados que navegan en el aire, capaces de inspeccionar amplias zonas y de llegar también a entornos hostiles para el ser humano. Pueden ser pilotados a distancia o controlados de forma autónoma [3][4].

Existen diferentes tipos de vehículos aéreos no tripulados (UAV), en función de la finalidad específica para la que han sido diseñados. Los vehículos aéreos no tripulados pueden diferir en tamaño desde el orden de centímetros hasta decenas de metros, en peso desde decenas de gramos hasta miles de kilogramos, en altitud operativa desde decenas de metros hasta treinta kilómetros, y en alcance desde 100 m hasta 1000 km [5].

Los vehículos aéreos no tripulados (UAV) de ala rotatoria o RUAS (Rotorcraft Unmanned Aircraft System) Y existen dos tipos de estos vehículos:

- Tipo Helicóptero.
- Multihelice.

Los vehículos multihelice o multi rotor son un tipo de vehículo aéreo de enorme difusión y que despierta un interés creciente entre los investigadores. Tienen capacidad de despegue y aterrizaje vertical y a menudo se desarrollan en forma de cuadricópteros, gracias a su pequeño tamaño, fácil control y alta maniobrabilidad.

La tecnología relacionada con los vehículos aéreos no tripulados está evolucionando de forma continua y rápida, y el número de aplicaciones de los vehículos aéreos no tripulados está creciendo de forma exponencial, e incluye la supervisión en tiempo real, la provisión de cobertura inalámbrica, la teledetección, la búsqueda y el rescate, la entrega de paquetes, la seguridad y la vigilancia, la agricultura de precisión y la inspección de infraestructuras civiles, como se muestra en la figura 1-1 [3][4].

Ventajas frente a los vehículos de alas fijas

- Son vehículos tipo VTOL (Vertical Take-Off and Landing), despegue y aterrizaje vertical.
- Movimiento omnidireccional.
- Vuelo Estacionario.
- Buen desempeño en vuelos a baja velocidad.
- Mejor desempeño en ambientes interiores de poco espacio.
- Mayor facilidad de miniaturización.

El entorno en el que operan los vehículos aéreos no tripulados puede afectar en gran medida a los resultados de sus misiones. El viento, la lluvia y las tormentas extremas pueden hacer que el UAV se desvíe de su trayectoria predeterminada o, sobre todo en el caso de los pequeños UAV, no permitir que el vehículo funcione y realice mediciones. Los problemas relacionados con las condiciones meteorológicas se agravan aún más en caso de catástrofes naturales o provocadas por el hombre, como, por ejemplo, tsunamis, huracanes o atentados terroristas [6]. Otro problema relacionado con el entorno operativo

del UAV surge de la posible presencia de obstáculos a lo largo de su trayectoria, y esto afecta tanto a entornos exteriores como interiores. Además, los obstáculos pueden ser estacionarios o estar en movimiento, lo que hace más complejo evitarlos.

La altitud alcanzada por los vehículos aéreos no tripulados es otro parámetro importante que puede verse influido por las condiciones del entorno. Si la elevación del área de interés cambia rápida y significativamente, por ejemplo, en el caso de un terreno escarpado, el UAV debe ser capaz de seguir estos cambios rápidamente, adaptándose y alcanzando la altitud requerida. Además, en el caso de aplicaciones a gran altura, el UAV debe ser capaz de adaptarse a los cambios de densidad y temperatura atmosférica, preservando su rendimiento aerodinámico.

La carga útil del UAV puede afectar a las capacidades de navegación y medición del vehículo, así como a la resistencia de la misión y al área cubierta, que son requisitos importantes para las aplicaciones en las que el UAV debe operar durante largos periodos de tiempo sobre grandes regiones de interés [6].

El peso limitado de la carga útil, la altitud y la distancia cubierta, así como las influencias de las condiciones meteorológicas y los obstáculos en el manejo, representan algunos puntos débiles de los UAV (figura 1-1) que la investigación intenta resolver. La amplia popularidad de los UAV no se reproduce en otras clases de UV.

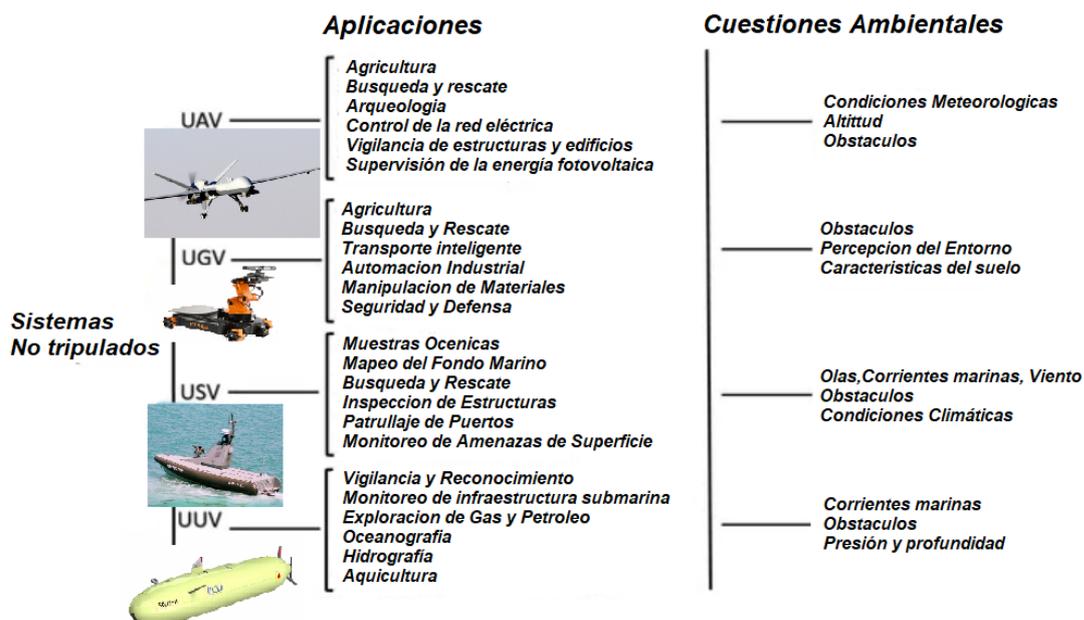


figura 1-1: Tipos de sistemas no tripulados y sus factores ambientales críticos.

### 1.1.2. Vehículos Terrestres no tripulados (UGV).

Los UGV son sistemas no tripulados que operan en tierra. Se utilizan para muchas aplicaciones (figura 1-1), como la exploración del espacio, la detección del entorno y la búsqueda y el rescate, y pueden tener muchas configuraciones diferentes, normalmente definidas por la tarea que deben realizar, así como por el entorno en el que deben operar. Los UGVs se han desarrollado en diferentes tamaños (que varían desde 500 g a 25.000

kg [7]) y configuraciones, normalmente vinculadas a la misión para la que fueron diseñados [8].

Los UGV suelen estar equipados con un controlador y sensores a bordo para observar el entorno y tomar decisiones de forma autónoma o enviar la información a distancia a un operador humano [2][8]. Dado que los sensores de a bordo de los UGV no pueden ver lo que hay más allá de los obstáculos que los rodean, este tipo de vehículos no tripulados puede verse obstaculizado por su dependencia de la detección en la línea de visión (Figura 1) [9].

Además, para este tipo de vehículos, el entorno operativo es una fuente de algunos desafíos. El polvo, el humo y la lluvia pueden influir fuertemente en los resultados de la misión del UGV, limitando la velocidad operativa y la capacidad de evitar posibles obstáculos, como por ejemplo, otros vehículos, que en este caso pueden ser estáticos o en movimiento. Los UGV deben ser capaces de ajustar su trayectoria y velocidad en un tiempo adecuado para evitar colisiones. Cuanto mayor sea la velocidad del UGV, mayor será la distancia a la que deben detectarse los obstáculos, y menor será el tiempo disponible para cambiar de trayectoria o detener el vehículo, teniendo en cuenta también que la distancia de frenado del UGV hasta la parada total aumenta con la velocidad.

El tipo de terreno por el que se mueve el vehículo es otro factor ambiental capaz de influir en los resultados de su misión y en sus operaciones. El terreno atravesado puede ser de tipo carretera, urbano, campo o fuera de la carretera. Los entornos urbanos son en general más complejos y dinámicos, debido a la presencia de muchos cruces, vehículos y peatones, que se mueven a diferentes velocidades y en diferentes direcciones. Las condiciones fuera de la carretera pueden ser menos complejas cuando el terreno es firme y regular, como en el caso, por ejemplo, de un desierto, pero también pueden ser más complejas cuando las condiciones del terreno son irregulares e inestables, como en el caso de los bosques [10].

La grava, el pavimento, el suelo de firmeza variable, el barro, la nieve, el hielo, el agua y la vegetación de diferentes alturas y grosores son otros tipos de terreno difíciles de atravesar para los UGV, prestando también atención a posibles masas de agua y barro que el vehículo debe ser capaz de evitar a tiempo para no correr el riesgo de quedarse atascado.

La percepción del entorno y el nivel de autonomía del UGV son las principales características en las que se centra el desarrollo tecnológico actual y futuro de este tipo de vehículos no tripulados.

### 1.1.3. Vehículos de Superficie no tripulados (USV).

Los USV son embarcaciones que operan en la superficie del agua y pueden ser operados a distancia o de forma autónoma. Los USV pueden adoptar muchas formas diferentes, dependiendo de la aplicación específica [4]. Su peso puede variar desde decenas de kg hasta miles de kg, con velocidades que pueden variar desde 1 m/s hasta unos 20 m/s [11].

Los USV pueden operar en condiciones peligrosas y arriesgadas para la seguridad humana. Además, este tipo de vehículos son compactos y tienen un bajo coste de mantenimiento.

Aunque los USV se utilizaron inicialmente en aplicaciones típicamente navales, como, por ejemplo, la vigilancia y el reconocimiento, hoy en día también se utilizan ampliamente en aplicaciones civiles, como, por ejemplo, la vigilancia y la evaluación del medio ambiente, como puede verse en la figura 1-1.

La navegación autónoma, la búsqueda y el rescate, la prospección en alta mar en las industrias del petróleo y el gas, la cartografía del fondo marino y la inspección de estructuras por encima y por debajo del agua son otros ejemplos de aplicaciones de los USV [4]. Los USVs necesitan operar en presencia de olas, corrientes y vientos (figura 1-1).

Este tipo de vehículo opera en contacto con dos entornos, el aire y el agua, que tienen características físicas completamente diferentes. Es necesario que los USV tengan la suficiente percepción del entorno para detectar y evitar los obstáculos que puedan estar por encima o por debajo del agua, para estimar su movimiento y distancia, y para percibir, en el caso de las zonas costeras, el límite entre el agua y la tierra.

Las condiciones meteorológicas y acuáticas adversas, como la lluvia y el viento extremo o las aguas agitadas y revueltas, pueden afectar en gran medida a los resultados de las misiones y al funcionamiento de los USV.

La resistencia para misiones de larga duración y el funcionamiento en condiciones meteorológicas extremas, así como la evitación de obstáculos por encima y por debajo del agua son los retos tecnológicos que constituyen los principales temas de investigación.

#### 1.1.4. Vehículos Submarinos no tripulados (UUV).

Los UUVs operan bajo la superficie del agua con una mínima o nula intervención del operador humano. Los UUVs pueden ser de diferentes tipos, variando en forma y tamaño, índices de profundidad, carga útil, capacidades de navegación y control. Los UUVs pueden diferir en longitud desde poco más de un metro hasta decenas de metros, pueden operar a diferentes profundidades que varían de 200 a 6000 m, y a diferentes velocidades de alrededor de 0,5 a 4 m/s, con un peso de hasta miles de kg [12][13]

Estos vehículos pueden ser vehículos teledirigidos (ROV), controlados por un operador a distancia, o vehículos submarinos autónomos (AUV), que funcionan independientemente de la intervención humana directa [4]. Los AUVs son los más complejos, ya que tienen que contar con funciones autónomas en un entorno difícil como el acuático.

Las aplicaciones de los UUV incluyen la vigilancia persistente, la guerra antisubmarina, la construcción submarina y el apoyo al mantenimiento de infraestructuras, la oceanografía, la hidrografía y las contramedidas contra las minas, como se muestra en la figura 1-1 [4].

Los UUVs deben operar en un entorno difícil, bajo una alta corriente oceánica y una fuerte presión hidráulica (figura 1-1). La cantidad de luz disponible bajo el agua es a menudo escasa, debido a las partículas de agua que dispersan la luz al entrar en el océano, o a la turbidez como, por ejemplo, en el caso de las aguas costeras poco profundas. La navegación y la maniobrabilidad de los UUV también pueden verse muy afectadas por las corrientes oceánicas y la densidad del agua. En algunos casos extremos, los cambios

repentinos de densidad pueden incluso impedir el movimiento de los UUV a través del agua. La estabilidad del vehículo también puede verse comprometida por el efecto del movimiento del agua causado por el viento o las variaciones de densidad en aguas más profundas [14]. Los UUV también deben prestar atención a la detección y evitación de obstáculos estáticos o en movimiento, como en el caso de los otros tipos de UUV.

Además, dado que mantener una conexión constante con los operadores remotos en tierra puede ser muy difícil en aguas profundas, la capacidad de navegación precisa representa otra cuestión crítica [13][14].

## 1.2. Hipótesis

De acuerdo a la problemática vigente en el ámbito de los vehículos autónomos, el seguimiento de trayectorias es un tema constante de estudio. En base a las investigaciones precedentes y el planteo de un análisis detallado de las técnicas con las cuales se pretende afrontar esta problemática, se derivó la siguiente hipótesis: La aplicación de técnicas de control neuro adaptable, mediante el uso de técnicas neuronales y control no-lineal, que permite estimar las variaciones dinámicas de los vehículos autónomos tratados en esta tesis, resolviendo así el problema de seguimiento de trayectorias con referencias predefinidas. La eficacia de los controladores propuestos en este proyecto, es determinada mediante la comparación de los errores obtenidos con respecto a los controladores de trabajo de investigación presentes en la literatura científica.

## 1.3. Objetivo General:

Desarrollar algoritmos de control avanzados, estables y de bajo costo computacional para la navegación de vehículos autónomos (aéreos, terrestres y marinos) en medios no estructurados, mediante la utilización de técnicas basadas en control no lineal e inteligencia artificial.

## 1.4. Objetivos Específicos:

- Describir las características de los vehículos autónomos, para establecer peculiaridades y problemas en su control.
- Desarrollar estrategias originales de control que permitan a los sistemas autónomos desarrollar tareas de navegación complejas o que mejoren el rendimiento de controladores ya conocidos.
- Diseñar las estrategias de control necesarias para resolver el problema de navegación de sistemas autónomos, con bajo costo computacional, utilizando Control No Lineal e Inteligencia Artificial para su aplicación on-board de los distintos vehículos.
- Diseñar algoritmos de control para un sistema autónomo (Robot Móvil, UAV – Unmanned Aerial Vehicles, Vehículo marino autónomo), el cual pueda navegar en distintos tipos de entornos.
- Garantizar analíticamente la estabilidad de los sistemas de control diseñados.
- Probar experimentalmente las estrategias de control resultantes.
- Obtener formación de posgrado a nivel Doctorado con experiencia en investigación al más alto nivel, particularmente en Ciencias de Ingeniería con énfasis en el control de sistemas no lineales y en particular en sistemas robóticos.

## 1.5. Justificación

El constante crecimiento económico a nivel mundial y en particular de la industria y sociedad han generado una gran cantidad de nuevas necesidades, dentro de las cuales el transporte es uno de los factores determinantes en este escenario global, además del desarrollo de las necesidades, también se han desarrollado sistemas avanzados en el ámbito tecnológico que permiten mantener gran interés en la robótica móvil terrestre ([20][24][29][30]), como también el control de vehículos aéreos [46][26] y marinos [15][16][42]. El amplio abanico de áreas en las cuales se está dividiendo el control de vehículos autónomos y su evolución ha propiciado que se generen nuevas áreas de interés y técnicas de gran impacto para el control de vehículos y dotarlos de autonomía, con la finalidad de que las perturbaciones externas y las variaciones en su dinámica o sus parámetros no afecten su control ni produzcan variaciones a la trayectoria a seguir ([32][33]), para lo cual es necesario incluir la capacidad de asimilar parámetros como reconocimiento y ajuste de parámetros y compensación dinámica. Dado que en el ámbito de la robótica móvil existen diversos tipos de mecanismos o configuraciones que permiten el desplazamiento del vehículo, es necesario conocer detalles propios del sistema móvil a analizar, tales como: configuración de tracción, dirección y grado de actuación. Las características citadas anteriormente definen la clasificación del sistema de acuerdo al grado en el cual se puede manipular, puesto que pueden ir desde ser sistemas sub actuados hasta ser completamente no holonómicos, es decir, que tienen menos grados de libertad controlables, algunas de las soluciones para dicha problemática se han desarrollado a través del tiempo obteniendo grandes resultados (Rossomando [33], Rosales [26], (agregar) Serrano[42], y Scaglia [39]). El diseño de un controlador es un proceso que debe apegarse a las características mecánicas y físicas del sistema que se desea manipular (Do et. al. [17]; Ghoman et. al.[18], Lapierre et. al.[22]), por tal motivo, es necesario conocer la mayor cantidad de características y variables que influyen en el comportamiento de dicho sistema, así como los aspectos o variables externas que pueden propiciar variaciones en las salidas, o respuestas a los estímulos directos a las variables de entrada. En este ámbito, la inteligencia artificial ha representado una alternativa viable gracias a su capacidad para abordar problemas y otorgar distintas soluciones para problemas complejos ( LeCun et al. [23],Rosales [27], Scaglia [36], Serrano [39] Schmidhuber [45]). La presente tesis muestra el desarrollo de un controlador neuro-adaptable para mejorar el seguimiento de trayectorias y aumentar el rechazo a las perturbaciones para diferentes tipos de vehículos autónomos, teniendo en cuenta toda la información disponible. Esta tesis también permite la simulación del comportamiento de los vehículos estudiados mediante distintas herramientas computacionales considerando entornos propios de un ambiente real.

## 1.6. Contribuciones de la tesis.

Esta tesis ofrece resultados teóricos y experimentales relacionados con el problema de seguimiento de trayectorias de vehículos autónomos. Se supone que la tarea que debe realizar el vehículo puede definirse mediante el establecimiento de la trayectoria a seguir. Pero, el robot móvil navega bajo el mando de un sistema de control local de trayectorias cuyas acciones de control se generan a partir de un conjunto de puntos objetivos que se desean alcanzar y se complementan con la información de las variables realimentadas del robot, las cuales permiten el seguimiento con el menor error posible ajustándose a la trayectoria de referencia. Este es el caso cuando el vehículo realiza tareas de transporte de cargas con dinámicas parcialmente conocidas y/o en ambientes donde puedan

perturbar el sistema (viento, olas, terrenos, etc), el cumplimiento de la tarea se torna en un problema de control que debe ser resuelto con diferentes técnicas computacionales con el menor costo de calculo posible. Así, entre las contribuciones de esta tesis se pueden mencionar:

**a) Desarrollo de un sistema de control para dinámica desconocidas.**

Esta técnica de control puede aplicarse a un sistema MIMO no lineal, siendo para el caso tratado la dinámica de diferentes vehículos autónomos. Además, puede aplicarse como técnica de control en la mayoría de los sistemas dinámicos pertenecientes a sistemas reales de diferente naturaleza sin conocer sus modelos matemáticos exactos o cuya dinámica puede ser desconocida.

**b) Enfoque de control híbrido.**

El enfoque de esta técnica tiene la ventaja sobre el control basado en modelos ya que el control neuro adaptable usando superficies deslizantes no requiere un conocimiento previo de la dinámica del vehículo (como se mencionó en el punto anterior); además, puede ser totalmente sintonizado en línea ajustando los parámetros de la red neuronal de base gaussiana (pesos, centros, anchos) y ganancias de los controladores.

Además, la técnica de controlador propuesta integra el control PI (proporcional integral) con Superficies deslizantes Neuro Adaptable. Con esta técnica de control, el efecto "chattering" indeseado puede ser reducido a valores realmente pequeños.

**c) Análisis de estabilidad del conjunto de controladores propuesto.**

Un aporte importante al momento de desarrollar algoritmos de control es el demostrar la estabilidad del sistema de control que se propone. En este caso, y por tratarse de un sistema embutido en el vehículo o en un computador, se presenta el análisis de estabilidad del sistema de control propuesto haciendo una extensión de la teoría de Lyapunov al espacio discreto y considerando restricciones en las acciones de control. Dicho análisis se aplicó para cada caso particular, tanto para vehículos terrestres, aéreos y marinos. Incluido su uso en tareas cooperativas.

**d) Verificación de cada uno de los controladores desarrollados mediante la experimentación sobre robots móviles terrestres, marinos y vehículos UAV.**

Todos los resultados teóricos obtenidos han sido formalizados mediante el uso de algoritmos. Se ha realizado el estudio de estabilidad de todos los algoritmos desarrollados, empleando herramientas de control lineal y no lineal como son la teoría de Lyapunov y la teoría de linealización por realimentación. Asimismo, estos algoritmos han sido implantados sobre el robot móvil PIONEER 2DX y en vehículos UAV del tipo Parrot y QBall. De esta forma, se ha comprobado la validez de los métodos expuestos con experimentos reales. Las gráficas que ofrecen un mecanismo de comparación entre los resultados teóricos y los experimentales se exponen a lo largo de toda la tesis.

### 1.7. Marco de realización.

La realización de esta tesis ha estado determinada por las actividades de investigación que se realizan en el Instituto de Automática de la Universidad Nacional de San Juan y del CITEDI (México), en la línea de vehículos autónomos y robótica móvil y, en particular, en el diseño de controladores de movimiento para robots móviles tipo monociclo de la familia Pioneer (como el PIONEER 2DX usado en uno de los experimentos).

Los estudios experimentales de las tesis se han realizado sobre distintos vehículos autónomos UAVs y WMR (un robot móvil de laboratorio). El autor de esta tesis se ha ocupado, de modo directo, de la especificación y la implementación de los algoritmos de control, algunos de los cuales fueron desarrollados en Matlab (Pioneer) y posteriormente en Python (Hummingbird) a bordo del robot WMR y de los UAVs respectivamente, con la utilización del sensor optitrack para cerrar los lazos de control. Así, todos los experimentos realizados se han llevado a cabo con el uso del mencionado vehículo. La implantación de todos los algoritmos, obtenidos como fruto de la investigación, ha sido realizada mediante el uso de Matlab y Python, bajo el sistema operativo Linux y Windows 10, y utilizando PC Intel I5.

### 1.8. Estructura de la tesis.

La tesis se encuentra dividida en ocho capítulos. Exceptuando el primer capítulo y el dedicado a las conclusiones, los restantes se inician con una introducción, que expone la problemática que se debe resolver junto con una breve descripción del contenido, en el cuerpo se presenta la solución propuesta junto con los resultados experimentales y finalizan con unas conclusiones, que destacan los aspectos más relevantes de cada capítulo. La organización de la tesis se describe en los siguientes párrafos del presente apartado.

El Capítulo 2, titulado “Preliminares teóricos” presenta las distintas teorías y herramientas analíticas para el estudio de la problemática de control que luego serán aplicados a los distintos tipos de vehículos y robots aquí estudiados. Como también se realiza una breve introducción a las redes neuronales artificiales y su aplicación a la identificación de sistemas, los cuales se usarán en la implementación de los controladores de los sistemas considerados. Incluye también los fundamentos teóricos del análisis de estabilidad de Lyapunov aplicado al control y la identificación, siendo una herramienta fundamental en el desarrollo de controladores con características adaptables. Finalmente se incluyen consideraciones prácticas para las reglas de ajuste obtenidas en el análisis de estabilidad. El Capítulo 3, se presenta una aplicación de los temas tratados en el punto anterior, donde se propone un controlador para seguimiento de trayectoria de un robot móvil. El controlador propuesto es del tipo de dinámica inversa no lineal combinado con una red neuronal adaptable del tipo RBF junto con un controlador del tipo PI de modo deslizante, el cual utiliza un algoritmo de aprendizaje en línea. La red neuronal debe aprender toda la dinámica del robot para ser empleada en un controlador inverso convencional, cuando el controlador mapea la totalidad de la dinámica mejora el rendimiento del robot móvil durante el seguimiento de la trayectoria. Además, el controlador propuesto debe reducir el error de aproximación de la red neuronal utilizando superficies deslizantes, la técnica completa de control se diseñó empleando la teoría de estabilidad de Lyapunov en tiempo discreto. Sobre el final del capítulo se muestran resultados experimentales del método propuesto, demostrando su eficacia para controlar sistemas dinámicos con grandes perturbaciones e incertidumbres no modeladas.

El Capítulo 4, cuyo título “Control de un vehículo marino usando compensación neuro adaptable basada en Superficies deslizantes”, presenta la técnica de Álgebra lineal aplicada a la cinemática de un vehículo marino y la estructura neuro adaptable basada en superficies deslizantes (SMC) controla la dinámica. En este capítulo también se muestra la capacidad adaptativa de las redes neuronales del tipo RBF que ajusta la dinámica del vehículo, incluyendo la dinámica no modelada. Se demuestra también la viabilidad de la técnica propuesta cuando se somete el vehículo marino a distintos tipos de perturbaciones externas, que incluyen la acción de las olas y el viento. Los resultados de la simulación

son presentados al final del capítulo junto a las conclusiones sobre este vehículo en particular.

En el Capítulo 5 se presenta una propuesta novedosa en el control cooperativo de vehículos aéreos, donde se desarrolló una estrategia para transportar una carga útil suspendida por cable con dos Cuadricópteros. La estructura de control está basada en un esquema de capas que combina un controlador cinemático basado en el espacio nulo y un controlador neural de modo deslizante (SMC). El controlador de espacio nulo está diseñado para generar referencias de velocidad para los Cuadricópteros en la formación, mientras que el controlador neural de modo deslizante recibe dichas velocidades de referencia y realiza una compensación sobre las variaciones dinámicas para posibles incertidumbres paramétricas, así como para las perturbaciones dinámicas causadas por la carga fijada a los Cuadricópteros. La estabilidad del sistema de control en lazo cerrado así implementado también se demuestra con base en la teoría de Lyapunov. Se incluyen modelos dinámicos muy detallados para los Cuadricópteros, los cables flexibles y la carga útil en un escenario muy realista. En el final del capítulo, se presentan simulaciones numéricas cuyos resultados demuestran un buen rendimiento del controlador propuesto.

En el Capítulo 6 se presenta una propuesta para el control de formación, que facilita el transporte de una carga útil suspendida por cable con dos cuadricópteros. La estructura de control se basa en un esquema de capas que combina un controlador cinemático basado en el espacio nulo y un controlador neural de modo deslizante (SMC). El controlador de espacio nulo está diseñado para generar referencias de velocidad para los Cuadricópteros en la formación, mientras que el controlador neural de modo deslizante recibe dichas velocidades de referencia y realiza una compensación dinámica para posibles incertidumbres paramétricas, así como para las perturbaciones dinámicas causadas por la carga fijada a los Cuadricópteros. La estabilidad del sistema de control fue demostrada usando la teoría de Lyapunov. Además, se incluyen modelos dinámicos muy detallados para los Cuadricópteros, los cables flexibles y la carga útil en un escenario muy realista. Para finalizar el trabajo, se presentan simulaciones numéricas cuyos resultados demuestran un buen rendimiento del controlador propuesto.

Y por último, en el Capítulo 7 presenta las conclusiones, trabajos futuros y las publicaciones resultantes de esta tesis doctoral.

## Capítulo 2. Preliminares Teóricos

Este capítulo presenta la base teórica necesaria para comprender el problema del modelado y el control de los vehículos autónomos. En primer lugar, se discuten conceptos sobre el modelado en espacio de estados. Posteriormente, se presentan definiciones y tipos de sistemas y conceptos de estabilidad, los cuales son utilizados en la elaboración de esta tesis. Por último, se discute la teoría del control multivariable, así como el método de sintonización de los controladores que se utilizarán en capítulos posteriores de este trabajo de investigación.

### 2.1. Introducción:

El estudio de la teoría de control de sistemas no lineales ha ido creciendo en los últimos años, tanto por su importancia técnica como por los impactos de sus aplicaciones. Áreas como la aeroespacial, la electrónica, la química y la petroquímica, la bioingeniería y la robótica, evolucionan cada día creando nuevos casos de aplicaciones prácticas de esta técnica.

Se dice que los sistemas no son lineales cuando no satisfacen el principio de superposición o el principio de proporcionalidad entrada-salida. Así, los métodos clásicos utilizados en el estudio de los sistemas lineales (lugar de la raíz, diagramas de Bode y Nyquist) no son aplicables a los sistemas no lineales. Por ello, es necesario recurrir a otros métodos para estudiar estos sistemas, en particular su estabilidad, y, entre otros, cabe destacar los métodos de Lyapunov [52].

El control no lineal es una ley de control que consta de términos no lineales en forma de realimentación. Como en el caso lineal, el control no lineal utiliza la realimentación, ya sea de la salida o del estado, para generar una señal de control que actuará sobre el proceso. A veces la cadena de realimentación tiene un diseño no lineal, ya sea para compensar las no linealidades del sistema a controlar, o para mejorar ciertos aspectos de control [53].

Cuando los sistemas no lineales deben controlarse aplicando métodos de control lineal, éstos generalmente sólo permiten un buen rendimiento dentro de un pequeño rango de funcionamiento del sistema. Fuera de este rango, el rendimiento no será satisfactorio o incluso inestable. En estos casos se hace necesario considerar el sistema linealizado en torno a ciertos puntos de funcionamiento (puntos de equilibrio) utilizando parámetros de control específicos para cada punto (programación de la ganancia) o ajustar los parámetros automáticamente (control adaptable), o utilizar una retroalimentación negativa que haga que el sistema de lazo cerrado se comporte como lineal (linealización por realimentación).

No siempre es posible linealizar el sistema en torno a un punto de equilibrio, por ejemplo, cuando el sistema contiene fricciones de Coulomb, huecos, zonas muertas, saturaciones, etc., no linealidades muy comunes en los procesos y sistemas reales. Para este tipo de no linealidades, denominadas no linealidades discontinuas, es necesario utilizar técnicas de control específicas. Normalmente, el diseño de sistemas no lineales, requiere un contacto más estrecho con la naturaleza de los sistemas que se van a controlar, para permitir una mejor comprensión de los fenómenos que se producen.

Entre las posibles técnicas para tratar el problema de control, el presente trabajo consiste en el estudio de control de sistemas no lineales, detallando el modelo no lineal de los vehículos autónomos aquí tratados y sus leyes de control más adecuadas y que sean un aporte a la presente tesis. Que a modo de ejemplo se pueden mencionar las técnicas de: control por dinámica inversa, control adaptable y redes neuronales.

## 2.2. Fundamentos de Sistemas No lineales:

Un sistema dinámico no lineal puede representarse mediante un número finito  $n$  de ecuaciones diferenciales no lineales en la llamada forma de espacio de estado.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)\end{aligned}$$

donde  $\dot{x}_i$  representa la derivada de  $x_i$  con respecto al tiempo. Las variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$  representan los estados del sistema, que son las variables que dan una descripción completa del sistema en un momento determinado, y  $f_1, f_2, \dots, f_n$  son funciones no lineales que describen la dinámica global del sistema. Con esta notación, el espacio de estados también puede escribirse en forma vectorial.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (2-1)$$

donde  $\mathbf{f}$  es una función vectorial no lineal  $n \times 1$  y  $\mathbf{x}$  es el vector de estado  $n \times 1$ . Un valor particular del vector de estado se llama punto, porque corresponde a un punto en el espacio de estado o una configuración particular del sistema dinámico. El número de estados  $n$  se denomina orden del sistema. Una solución  $\mathbf{x}(t)$  de la Ec. (2-1) que suele corresponder a una curva en el espacio de estados a medida que el tiempo  $t$  varía de cero hasta el infinito, se conoce generalmente como trayectoria del estado o del sistema [44]. Lo más importante en la ingeniería de sistemas de control es el comportamiento del sistema  $\mathbf{x}(t)$  en torno a algún punto de funcionamiento o movimiento nominal deseado, lo que introduce la noción de estabilidad, un concepto que se verá en detalle en la siguiente sección.

Si la trayectoria de un sistema corresponde a un único punto a lo largo de su evolución temporal completa, entonces dicho punto es un equilibrio. En otras palabras, un valor particular  $\mathbf{x}^*$  del vector de estado es un punto de equilibrio del sistema (2-1) si, para la condición inicial  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^*$ , la trayectoria del sistema  $\mathbf{x}(t)$  permanece igual a  $\mathbf{x}^*$  para todo  $t$  mayor que cero.

Esto significa también que el vector constante  $\mathbf{x}^*$ , que es un punto de equilibrio, satisface  $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = 0$ . El concepto de equilibrio es muy importante para el estudio de la estabilidad, ya que muchos problemas de estabilidad se formulan naturalmente con respecto a puntos de equilibrio [53].

El sistema no lineal (2-1) se dice autónomo, ya que  $\mathbf{f}$  no depende explícitamente del tiempo  $t$ . Por otro lado, el sistema se llama no autónomo si el vector de funciones no lineales  $\mathbf{f}$  depende explícitamente del tiempo  $t$ , tal que

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \quad (2-2)$$

Una propiedad análoga para los sistemas lineales depende de si la matriz de coeficientes  $A$  varía con el tiempo o no, clasificándose como variable en el tiempo o invariable en el tiempo, respectivamente.

Además, es importante señalar que las ecuaciones de estado (2-1) y (2-2) se describen sin la presencia explícita de una variable de entrada  $\mathbf{u}$ , es decir, la llamada ecuación de estado no forzada. Hay dos razones para trabajar con una ecuación de estado no forzada:

- (i) Se supone que la entrada al sistema es cero.
- (ii) La ecuación de estado representa la dinámica de lazo cerrado de un sistema retroalimentado compuesto por el controlador y la planta, siendo la entrada de control  $\mathbf{u}$  una función del estado  $\mathbf{x}$ , una función del tiempo  $t$ , o ambas, y por lo tanto desapareciendo en la dinámica de lazo cerrado [52], [53].

Una representación más general de un sistema no lineal de lazo abierto, es decir, la planta del sistema considerado, es la ecuación diferencial vectorial de primer orden  $n$ -dimensional

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (2-3)$$

con el vector de funciones no lineales  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$  que depende de la variable temporal  $t \in \mathbb{R}^+$ , el vector de estado  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , y el vector de entrada  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$  que se definirá en función del estado  $\mathbf{x}$  y del tiempo  $t$ .

### 2.3. Propiedades Fundamentales:

Una función vectorial generalizada  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$  se dice que es Lipschitz si satisface la condición de Lipschitz, que viene dada por la desigualdad

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y})\| \leq \mathcal{L}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (2-4)$$

para todo  $(t, \mathbf{x})$  y  $(t, \mathbf{y})$  en alguna vecindad de  $(t_0, \mathbf{x}_0)$ , con  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ . Para  $f(t, \mathbf{x})$ , siendo una función autónoma y escalar, la condición de Lipschitz puede escribirse como

$$|f(t, \mathbf{x}) - f(t, \mathbf{y})| \leq \mathcal{L}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (2-5)$$

Entonces, se dice que  $f$  es una función de Lipschitz, lo que implica que en un gráfico de  $f(x)$  frente a  $x$ , una recta que una dos puntos cualesquiera de  $f(x)$  no puede tener una pendiente cuyo valor absoluto sea mayor que la llamada constante de Lipschitz  $\mathcal{L}$  [53].

La existencia y unicidad de la solución  $\mathbf{x}(t)$  para un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma (2-1) y (2-2), para un estado inicial dado  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ , con  $t > t_0$ , puede garantizarse si el lado derecho de (2-1) y (2-2) satisface la condición de Lipschitz en (2-4) [52].

Sea  $\mathbf{f}$  una función continuamente diferenciable en cada punto del intervalo abierto  $(x, y)$ . El Teorema del Valor Medio establece que existe un punto  $z$  en  $(x, y)$  tal que [52].

$$f(x) - f(y) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=z} (y - x) \quad (2-6)$$

Por último, una matriz cuadrada  $\mathbf{A}$  se llama matriz de Hurwitz cuando todos sus valores propios  $\lambda_i$  tienen una parte real estrictamente negativa.

### 2.4. Conceptos de estabilidad:

Como ya se ha mencionado, la noción intuitiva de estabilidad de los sistemas dinámicos es una especie de buen comportamiento de las trayectorias del sistema en torno a un punto de funcionamiento deseado (típicamente un equilibrio) y si las trayectorias del sistema se mantendrán cerca del equilibrio si son ligeramente perturbadas. Pero en los problemas prácticos, la estabilidad del movimiento es una preocupación más común, es decir, el comportamiento de las trayectorias del sistema alrededor de una trayectoria de movimiento deseada. Sin embargo, el problema de estabilidad del movimiento puede transformarse en un problema de estabilidad equivalente alrededor de un punto de equilibrio. Además, por comodidad, se supone que el punto de equilibrio analizado está

en el origen, es decir,  $x = 0$ , ya que cualquier punto de equilibrio puede desplazarse al origen mediante un cambio de variables. Por lo tanto, todas las definiciones de estabilidad serán dadas como un problema de estabilidad alrededor del origen del espacio de estados [52], [53].

**Definición 2-1** El punto de equilibrio  $x = 0$  del sistema (2-1) es estable si, para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  tal que

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0 \quad (2-7)$$

De lo contrario, es inestable.

Esta definición de estabilidad (también llamada estabilidad en el sentido de Lyapunov) requiere la existencia de  $\delta > 0$  para cada  $\varepsilon > 0$  y no para algún  $\varepsilon > 0$ . Es decir, para cualquier valor de  $\varepsilon$ , debe existir un valor  $\delta$ , posiblemente dependiente de  $\varepsilon$ , tal que una trayectoria que comience en una vecindad  $\delta$  del origen nunca abandonará la vecindad  $\varepsilon$  [52].

**Definición 2-2** El punto de equilibrio  $x = 0$  del sistema (2-1) es asintóticamente estable si es estable y se puede elegir  $\delta$  de forma que

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0, \quad (2-8)$$

La estabilidad asintótica significa que el punto de equilibrio es estable y que, además, las trayectorias del sistema iniciadas cerca del origen convergen realmente a él a medida que el tiempo  $t$  se acerca al infinito. El conjunto de todos los puntos en los que las trayectorias iniciadas en estos puntos convergen finalmente al origen se denomina dominio de atracción. Un punto de equilibrio que es estable en el sentido de Lyapunov pero no asintóticamente estable se llama marginalmente estable [53]

**Definición 2-3** El punto de equilibrio  $x = 0$  del sistema (2-1) es exponencialmente estable si existen  $\alpha > 0$  y  $\lambda > 0$  tales que

$$\|x(t)\| \leq \alpha \|x(0)\| e^{-\lambda t}, \quad \forall t \geq 0 \quad (2-9)$$

Esto significa que las trayectorias del sistema iniciadas en el dominio de atracción de un equilibrio exponencialmente estable convergen a él más rápido que una función exponencial.

De hecho, el número positivo  $\lambda$  se llama tasa de convergencia. Nótese que la estabilidad exponencial implica estabilidad asintótica, pero lo contrario es falso [53].

**Definición 2-4** Si el equilibrio  $x = 0$  del sistema (2-1) satisface la definición de estabilidad de la Definición 2-1, la estabilidad asintótica de la Definición 2-2, o la estabilidad exponencial de la Definición 2-3 para cualquier condición inicial  $x(t)$ , entonces se dice que el punto de equilibrio es globalmente (asintóticamente o exponencialmente) estable.

De lo contrario, el comportamiento del sistema se caracteriza sólo localmente. Es decir, sólo sabemos cómo evolucionan las trayectorias del sistema después de empezar cerca del punto de equilibrio, pero no tenemos información sobre cómo se comportará el sistema cuando las condiciones iniciales se encuentran a cierta distancia del equilibrio.

El método directo de Lyapunov puede utilizarse para estudiar la estabilidad de los sistemas de forma local o global. El análisis local se ocupa de la estabilidad en una vecindad del punto de equilibrio, mientras que el análisis global describe las propiedades de estabilidad en todo el espacio de estados. Este análisis suele implicar una función definida positiva local o globalmente, es decir, una función estrictamente positiva, que sólo es nula en el origen.

**Teorema 2-1** (Estabilidad) Si, en una bola  $B_r$  que contiene el origen, existe una función escalar  $V(x)$  con primeras derivadas parciales continuas a lo largo de las trayectorias de (2-1) tal que

- $V(x)$  es localmente definida positiva en  $B_r$ ,
- $\dot{V}(x)$  es localmente semidefinida negativa en  $B_r$ ,

entonces el origen de (2-1) es estable. Si la bola  $B_r$  puede expandirse para ser todo el espacio de estados, entonces el origen es globalmente estable [53].

**Teorema 2-2** (Estabilidad asintótica) Si, en una bola  $B_r$  que contiene el origen, existe una función escalar  $V(x)$  con primeras derivadas parciales continuas a lo largo de las trayectorias de (2-1) tal que

- $V(x)$  es localmente definida positiva en  $B_r$ ,
- $\dot{V}(x)$  es localmente definida negativa en  $B_r$ ,

entonces el origen de (2.1) es asintóticamente estable. Si la bola  $B_r$  puede expandirse para ser el espacio de estados completo y

- $V(x) \rightarrow \infty$  como  $\|x(t)\| \rightarrow \infty$

entonces el equilibrio en el origen es globalmente asintóticamente estable [53].

Para la estabilidad asintótica global, debe cumplirse una condición adicional en la función  $V$  debe ser radialmente no limitada, lo que significa que  $V(x)$  tiende a infinito a medida que  $x$  se acerca al infinito en cualquier dirección. Para demostrar la estabilidad exponencial, debe garantizarse una tasa de disipación mínima. El siguiente teorema para la estabilidad exponencial se adapta para el caso autónomo a partir del Teorema 4.10 de [52].

**Teorema 2-3** (Estabilidad exponencial) Si, en una bola  $B_r$  que contiene el origen, existe una función escalar  $V(x)$  con primeras derivadas parciales continuas a lo largo de las trayectorias de (2-1) tal que

- $k_1 \|x\|^2 \leq V(x) \leq k_2 \|x\|^2$  localmente en  $B_r$ ,
- $\frac{\partial V}{\partial x} f(x) \leq k_3 \|x\|^2$  localmente en  $B_r$ ,

con constantes positivas  $k_1$ ,  $k_2$  y  $k_3$ , entonces el origen de (2-1) es exponencialmente estable.

Si la bola  $B_r$  puede expandirse para ser todo el espacio de estados, entonces el equilibrio en el origen es globalmente estable de forma exponencial.

Si tal función  $V$ , que satisface las condiciones de los Teorema 2-1, Teorema 2-2 o Teorema 2-3, existe, entonces se llama función de Lyapunov para el sistema (2-1), demostrando que su origen es estable, asintóticamente estable o exponencialmente estable, respectivamente. Estudios más profundos y extendidos sobre el método directo de Lyapunov para sistemas generales pueden encontrarse en, [52], [53], [55].

## 2.5. Lema de Barbalat

Para los sistemas variantes en el tiempo, suele ser muy difícil encontrar funciones de Lyapunov con una derivada definida negativa. Por lo tanto, afirmar la estabilidad asintótica para tales sistemas no es una tarea fácil. El lema de Barbalat es una herramienta muy útil que ayuda a asegurar la estabilidad asintótica para sistemas no autónomos con una derivada semidefinida negativa de la función de Lyapunov.

**Lemma 1.1** (Barbalat) Si la función diferenciable  $f(t)$  tiene un límite finito a medida que  $t \rightarrow \infty$ , y si  $\dot{f}$  es uniformemente continua, entonces  $\dot{f}(t) \rightarrow 0$  a medida que  $t \rightarrow \infty$  [53]. Para la aplicación del lema de Barbalat al análisis de sistemas dinámicos, se puede utilizar el siguiente lema "tipo Lyapunov":

**Lemma 1.2** Si una función escalar  $V(t, x)$  satisface las siguientes condiciones:

- $V(t, x)$  está acotada por abajo.
- $\dot{V}(t, x)$  es semidefinida negativa.
- $\dot{V}(t, x)$  es uniformemente continua en el tiempo entonces  $\dot{V}(t, x) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$  [53].

Una condición suficiente para que una función diferenciable sea uniformemente continua es que su derivada sea acotada [53]

## 2.6. Acotamiento y acotación final

Recordemos el sistema no autónomo introducido en (2-2), donde el origen no es un punto de equilibrio. Sin puntos de equilibrio, no es posible hablar de estabilidad, ya que cualquier noción de estabilidad es una propiedad del equilibrio. Sin embargo, es posible demostrar la acotación de las trayectorias del sistema en torno al origen, incluso aunque no se trate de un equilibrio.

**Definición 2-5** Las soluciones de (2-2) están

- uniformemente acotadas si existe una constante positiva  $c$ , independiente de  $t_0 > 0$ , y para cada  $a \in (0, c)$ , existe  $\beta = \beta(a) > 0$ , independiente de  $t_0$ , tal que

$$\|x(t_0)\| \leq a \Rightarrow \|x(t)\| \leq \beta, \quad \forall t \geq t_0 \quad (2-10)$$

- globalmente acotado de manera uniforme si (2-10) se cumple para  $a$  arbitrariamente grande.
- uniformemente acotado en última instancia (UUB) con límite último  $b$  si existen constantes positivas  $b$  y  $c$ , independientes de  $t_0 \geq 0$ , y para cada  $a \in (0, c)$ , existe  $T = T(a, b) \geq 0$ , independiente de  $t_0$ , tal que

$$\|x(t_0)\| \leq a \Rightarrow \|x(t)\| \leq b, \quad \forall t \geq t_0 + T \quad (2-11)$$

- globalmente acotado uniformemente en última instancia si (2-11) se cumple para  $a$  arbitrariamente grande.

En el caso de los sistemas autónomos, la palabra "uniformemente" puede eliminarse. Considerando una función continuamente diferenciable y definida positivamente  $V(t, x)$ , se puede utilizar el siguiente teorema de Lyapunov para demostrar la acotación uniforme y la acotación final [52].

**Teorema 2-4** Sea  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  un dominio que contiene el origen y  $V: [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}$  una función continuamente diferenciable tal que

$$\alpha_1 \|x\| \leq V(t, x) \leq \alpha_2 \|x\| \quad (2-12)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -\mathcal{F}(x), \quad \forall \|x\| \geq \mu > 0 \quad (2-13)$$

$\forall t \geq 0$  y  $\forall x \in D$ , donde  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son funciones de clase  $\mathcal{K}$  y  $\mathcal{F}(x)$  es una función continua definida positiva. Tomemos  $r > 0$  tal que  $B_r \subset D$  y supongamos que

$$\mu < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)) \quad (2-14)$$

Entonces, existe una función  $\mathcal{KL}$  de clase  $\beta$ , y para cada estado inicial  $x(t_0)$ , que satisface  $\|x(t_0)\| < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r))$ , existe  $T \geq 0$  (dependiente de  $x(t_0)$  y  $\mu$ ) tal que la solución de (2-2) satisface

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0), \quad \forall t_0 \leq t \leq t_0 + T, \quad (2-15)$$

$$\|x(t)\| \leq \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)), \quad \forall t \geq t_0 + T, \quad (2-16)$$

Además, si  $D = \mathbb{R}^n$  y  $\alpha_1$  pertenece a la clase  $\mathcal{K}_\infty$ , entonces (2-15) y (2-16) se sostienen para cualquier estado inicial  $x(t_0)$ , sin restricción de lo grande que sea  $\mu$ .

Las definiciones de clase  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{K}_\infty$  y funciones  $\mathcal{KL}$  pueden consultarse en [52]. Las principales diferencias de los Teorema 2-1-Teorema 2-3 con respecto al Teorema 2-4 son que en este último, el sistema (2-2) no tiene puntos de equilibrio y  $\dot{V}$  es negativo fuera de un conjunto como el dado en (2-13).

## 2.7. Linealización por realimentación:

Introduzcamos un sistema no lineal de una entrada y una salida (SISO) de la forma

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (2-17)$$

y una función de salida escalar

$$y = h(x) \quad (2-18)$$

La linealización por retroalimentación se basa en la idea de la existencia de una ley de control por realimentación de estado  $u$  que transforma algebraicamente la dinámica del sistema no lineal en un sistema lineal (total o parcialmente) equivalente. De forma simplificada, la linealización por realimentación significa cancelar las no linealidades de un sistema de forma que la dinámica de lazo cerrado resulte ser lineal. La mayoría los algoritmos de control de movimiento presentados en esta tesis se basan en la linealización por realimentación de sistemas no lineales de una entrada y una salida.

Consideremos el sistema de una entrada y una salida (2-17)-(2-18), donde  $f$ ,  $g$  y  $h$  son suficientemente suaves (esto significa que todas sus derivadas parciales son definidas y continuas) en un dominio  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ . La primera derivada temporal de la función de salida  $y$  en (2-18) a lo largo de las trayectorias de la ecuación de estado (2-17) viene dada por

$$\dot{y} = \frac{\partial h}{\partial x} [f(x) + g(x)u] \triangleq L_f h(x) + L_g h(x)u$$

Donde

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} f(x)$$

se llama la derivada de Lie de  $h$  con respecto a  $f$ . Esto significa la derivada de  $h$  a lo largo de las trayectorias del sistema  $\dot{x} = f(x)$ . La notación  $L_f^i$  se utiliza para repetir  $i$  veces el cálculo de la derivada a lo largo del mismo campo vectorial. Esta notación es muy conveniente para definir la expresión general del controlador de linealización de realimentación  $u$  tal que

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h(x)} [-L_f^r h(x) + v] \quad (2-19)$$

reduce el mapa de entrada-salida a

$$y^{(\rho)} = v \quad (2-20)$$

siendo el número entero  $r$  el grado relativo del sistema, es decir, la función de salida  $h(x)$  debe derivarse  $r$  veces hasta obtener una expresión que relacione la entrada  $u$  con la salida  $y$ . En otras palabras, se dice que el sistema no lineal (2-17)-(2-18) tiene un grado relativo  $r$ ,  $1 \leq r \leq n$ , en una región  $D_0 \subset D$  si

$$L_g L_f^{i-1} h(x) = 0, \quad i = 1, 2, 3 \dots r-1; \quad L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0$$

para todo  $x \in D_0$  [52].

En particular, cuando la ecuación de estado está completamente linealizada a través de la transformación de entrada  $u$ , es decir, el grado relativo  $r$  es igual al orden del sistema  $n$ , se conoce como linealización completa de estado o entrada-estado. Por otro lado, cuando sólo se linealiza el mapa de entrada-salida mientras que la ecuación de estado sólo se linealiza parcialmente (es decir, el grado relativo  $1 \leq r < n$ ), se conoce como *linealización de entrada-salida*.

Por último, la dinámica de salida en lazo abierto en (2-20) es una simple cadena lineal de  $r$  que describen la relación entre la salida y la nueva entrada  $v$  que debe definirse. Esta nueva entrada de control puede elegirse como

$$v = -k_0 y - k_1 \dot{y} - \dots - k_{r-1} y^{(r-1)}$$

lo que lleva a la dinámica de salida en lazo cerrado

$$k_0 y + k_1 \dot{y} + \dots + k_{r-1} y^{(r-1)} + y^{(r)} = 0$$

con las constantes positivas  $k_i$  elegidas de modo que el polinomio  $k_0 y + k_1 \dot{y} + \dots + k_{r-1} y^{(r-1)} + y^{(r)}$  tenga todas sus raíces estrictamente en el plano complejo de la mitad izquierda. Esto asegura que  $y(t) \rightarrow 0$  con una tasa de convergencia exponencial. Sin embargo, la selección de  $v$  no es única. La forma más simple de la dinámica de salida en (2-20) también puede utilizarse en el desarrollo de controladores no lineales robustos, adaptativos o basados en redes neuronales, como se verá en los Capítulos 3, 4 y 5.

Los conceptos utilizados para los sistemas SISO pueden ampliarse para formular sistemas múltiple entrada-múltiple salida (MIMO). En el caso MIMO, se consideran los siguientes sistemas cuadrados (sistemas con el mismo número de entradas y salidas):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (2-21)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \quad (2-22)$$

donde  $\mathbf{x}$  es el vector de estado,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  es el vector de entradas de control,  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$  es un campo vectorial suave,  $\mathbf{G}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$  es la matriz  $[\mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \mathbf{g}_2(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{g}_m(\mathbf{x})]$ , con  $\mathbf{g}_i(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$  es un campo vectorial suave,  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$  es el vector de funciones de salida y  $\mathbf{h}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$  es un vector de funciones escalares  $h(\mathbf{x})$ .

De forma similar al caso SISO, para obtener la linealización entrada-salida del sistema MIMO, es necesario diferenciar la salida  $\mathbf{y}$  hasta que aparezcan las entradas  $\mathbf{u}$ .

Asumiendo que el grado relativo  $r_i$  es el menor número entero tal que al menos una de las entradas  $u_i$  aparece, con  $\{i = 1, 2, \dots, m\}$ , entonces la dinámica de salida en lazo abierto para el caso MIMO puede escribirse como:

$$\begin{bmatrix} y_1^{(r_1)} \\ \vdots \\ y_m^{(r_m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_f^{r_1} h_1(x) \\ \vdots \\ L_f^{r_m} h_m(x) \end{bmatrix} + \mathbf{E}(x) \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \quad (2-23)$$

donde la matriz  $\mathbf{E}(x) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , que se define como

$$\mathbf{E}(x) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1 & \dots & L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{r_m-1} h_m & \dots & L_{g_m} L_f^{r_m-1} h_m \end{bmatrix} \quad (2-24)$$

se denomina matriz de desacoplamiento del sistema MIMO. Si la matriz de desacoplamiento es no singular en una región alrededor del origen, entonces la transformación de entrada

$$\mathbf{u} = -\mathbf{E}^{-1} \begin{bmatrix} L_f^{r_1} h_1(x) \\ \vdots \\ L_f^{r_m} h_m(x) \end{bmatrix} + \mathbf{E}^{-1} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} \quad (2-25)$$

produce una relación diferencial lineal entre la salida  $\mathbf{y}$  y la nueva entrada  $\mathbf{v}$ ,

$$\begin{bmatrix} y_1^{(r_1)} \\ \vdots \\ y_m^{(r_m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} \quad (2-26)$$

Dado que la relación entrada-salida anterior está desacoplada, la ley de control de desacoplamiento dada en (2-25) puede utilizarse para diseñar controladores de seguimiento o estabilización utilizando el diseño SISO en cada relación  $y_i - v_i$  [53].

Finalmente, el concepto de grado relativo para el sistema MIMO puede formalizarse como sigue:

**Definición 2.6** Se dice que el sistema (2-21)-(2-22) tiene grado relativo  $(r_1, \dots, r_m)$  en  $x_0$  si existe una vecindad  $B$  de  $x_0$  tal que  $\forall x \in B$ ,

- $L_{g_i} L_f^k h_j(x) = 0$ ,  $0 \leq k \leq r_i - 1$ ,  $1 \leq i, j \leq m$ ,
- $\mathbf{E}(x)$ , es no singular

El grado relativo total del sistema se define por  $r = r_1 + \dots + r_m$  [53].

## 2.8. Control por Modo Deslizante (SMC)

En los sistemas de control, el control de modo deslizante (SMC) es un método de control no lineal que altera la dinámica de un sistema no lineal mediante la aplicación de una señal de control discontinua (o más rigurosamente, una señal de control de valor fijo) que obliga al sistema a "deslizarse" a lo largo de una sección transversal del comportamiento normal del sistema. La ley de control de estado-retroalimentación no es una función continua del tiempo. En cambio, puede cambiar de una estructura continua a otra según la posición actual en el espacio de estado. Por lo tanto, el control de modo deslizante es un método de control de estructura variable. Las múltiples estructuras de control están diseñadas para que las trayectorias siempre se muevan hacia una región adyacente con

una estructura de control diferente, y así la trayectoria final no existirá enteramente dentro de una estructura de control. En cambio, se deslizará a lo largo de los límites de las estructuras de control. El movimiento del sistema a medida que se desliza a lo largo de estos límites se denomina *modo deslizante* [56],[57] y el lugar geométrico que consiste en los límites se denomina (hiper)superficie deslizante. En el contexto de la teoría de control moderna, cualquier sistema de estructura variable, como un sistema bajo SMC, puede verse como un caso especial de un sistema dinámico híbrido. ya que el sistema fluye a través de un espacio de estado continuo, pero también se mueve a través de diferentes modos de control discretos

### 2.8.1. Descripción matemática:

Considere un sistema escalar, invariante con el tiempo de la forma:

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (2-27)$$

$$y = h(x) \quad (2-28)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados y  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un campo vectorial,  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  un campo escalar y  $u \in \mathbb{R}$  la función de control.

Se define entonces una función de las variables de estado del sistema, llamada superficie de conmutación, y una función de control escalar y discontinua, dependiente de la superficie de conmutación:

$$s = \{x \in \mathbb{X} \subset \mathbb{R}: S(x) = 0\} \quad (2-29)$$

$$u = \begin{cases} u^+(x, t) & \text{si } S(x) > 0 \\ u^-(x, t) & \text{si } S(x) < 0 \end{cases} \quad (2-30)$$

La acción  $u$  se define de tal manera que el campo vectorial apunte o se dirija hacia la superficie de deslizamiento (figura 2-1)

$$\dot{x} = \begin{cases} f(x, u^+) & \text{si } S(x) > 0 \\ f(x, u^-) & \text{si } S(x) < 0 \end{cases} \quad (2-31)$$

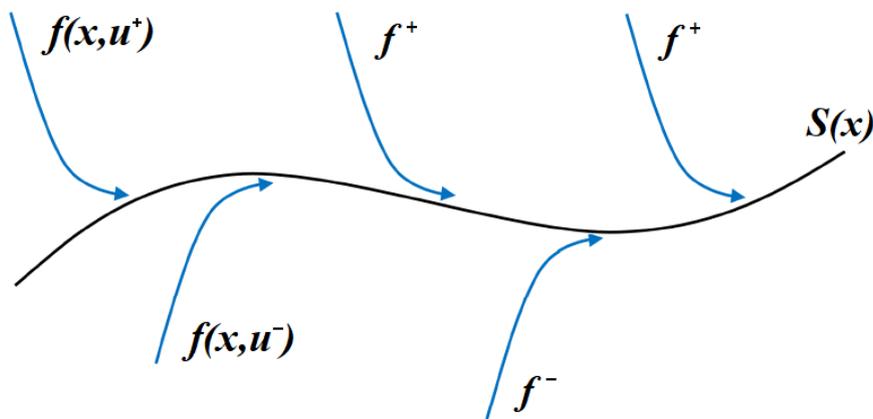


figura 2-1: Campo vectorial  $f(\cdot)$  apuntando hacia la superficie de conmutación

Para asegurar esta condición, en el límite de la función de conmutación, si esta es positiva debe decrecer y si esta es negativa debe crecer; permitiendo una vez alcanzada la superficie, permanecer en ella.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} \dot{S}(\mathbf{x}) < 0 & \text{si } S(\mathbf{x}) > 0 \\ \dot{S}(\mathbf{x}) > 0 & \text{si } S(\mathbf{x}) < 0 \end{cases} \quad (2-32)$$

Esta condición se define como la condición de existencia del modo deslizante, debido a que comprueba que si el campo vectorial  $f$  se dirige hacia  $S(\mathbf{x})$ , en el límite de la función de conmutación, este campo  $f$ , permanezca en la variedad. Esta condición garantiza un régimen deslizante de  $f$  sobre la superficie  $S(\mathbf{x})$ . También se puede escribir como:

$$\dot{S}(\mathbf{x})S(\mathbf{x}) < 0 \quad (2-33)$$

Se conoce como condición de alcanzabilidad.

### 2.8.2. Condiciones de existencia, invarianza y transversalidad

Existen unas condiciones de existencia, invarianza y transversalidad que serán interpretadas geoméricamente, por lo que se utilizará el concepto de derivada direccional. La derivada direccional es una función escalar que indica la razón de cambio de un campo escalar en dirección de un campo vectorial. Con esto expresaremos la derivada de la función de conmutación como la derivada direccional en  $f$ .

$$\dot{S}(\mathbf{x}) = \frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}, u) \quad (2-34)$$

Con esto se puede expresar la condición de existencia del modo deslizante como:

$$\dot{S}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}, u^+) < 0 & \text{si } S(\mathbf{x}) > 0 \\ \frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}, u^-) > 0 & \text{si } S(\mathbf{x}) < 0 \end{cases} \quad (2-35)$$

Si se considera un sistema de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u \quad (2-36)$$

$$y = h(\mathbf{x}) \quad (2-37)$$

Aplicando la condición de existencia:

$$\dot{S}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} (f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u^+) < 0 & \text{si } S(\mathbf{x}) > 0 \\ \frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} (f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u^-) > 0 & \text{si } S(\mathbf{x}) < 0 \end{cases} \quad (2-38)$$

Se puede observar que un régimen deslizante sobre la superficie de conmutación, solo es posible si:

$$\frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} g(\mathbf{x}) \neq 0 \quad (2-39)$$

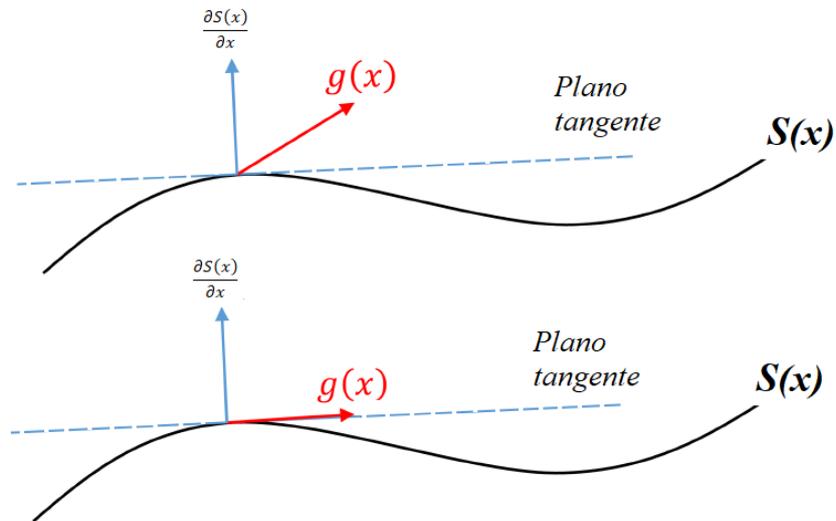


figura 2-2: Condición de transversalidad

A esta condición se conoce como condición de transversalidad, la cual indica que el gradiente de  $\partial S(\mathbf{x})/\partial \mathbf{x}$  no puede ser ortogonal a  $g$ , ya que si esto ocurre no se puede forzar a  $f$  a permanecer en la superficie de conmutación (ver figura 2-2). Esto permite entender que los valores que toma la función de control  $u^+$  y  $u^-$  son diferentes.

$$u = \begin{cases} u^+(\mathbf{x}, t) & \text{si } S(\mathbf{x}) > 0 \\ u^-(\mathbf{x}, t) & \text{si } S(\mathbf{x}) < 0 \end{cases} \quad u^+ \neq u^- \quad (2-40)$$

Suponiendo  $u^+ > u^-$ , restando las dos expresiones de la condición de existencia para el sistema constituido por (2-36) y (2-37), podemos complementar la condición de transversalidad de la forma:

$$\frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} g(\mathbf{x})(u^+ - u^-) < 0 \quad \frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} g(\mathbf{x}) < 0 \quad (2-41)$$

Lo que garantiza la elección correcta de la función de conmutación y la condición de transversalidad del régimen deslizante sobre  $S(\mathbf{x})$ .

### 2.8.3. Dinámica del plano deslizante

Debido a que la función de control es discontinua, no se puede describir convencionalmente el modo deslizante, ya que no satisface las condiciones de existencia y unicidad. Esto conlleva a regularizar el problema. Regularizar es el proceso que permite trabajar el sistema con un modelo equivalente que cumpla con las condiciones de existencia y unicidad, y que entregue resultados esperados para el sistema original. Los métodos de Filippov y del control equivalente permiten regularizar el sistema.

### 2.8.4. Método de Filippov

El método de Filippov define una franja límite ( $\Delta$ ) alrededor de la superficie de deslizamiento lo suficientemente pequeña, donde en un intervalo de tiempo corto, los campos vectoriales  $f^+$  y  $f^-$  debidos a la función de control discontinua, son constantes en algún punto del plano deslizante  $S(x)$ , como se observa en la figura 2-3.

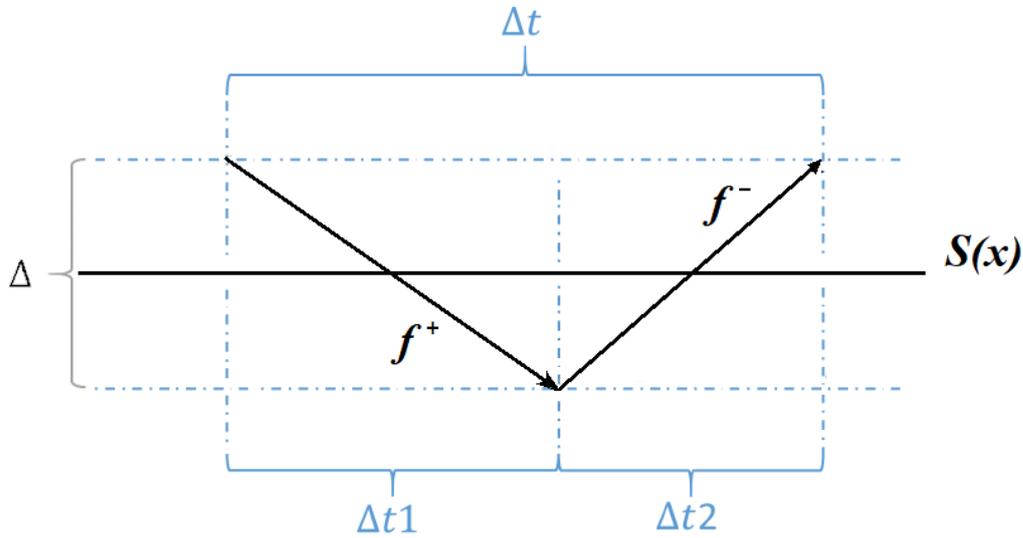


figura 2-3: Método de Filippov

Dividiendo el intervalo de tiempo considerando que en una parte actúa  $f^+$  y en otra parte  $f^-$ , el promedio de velocidad de los estados (vector velocidad) será:

$$\dot{x} = F = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \mu f^+ + (1 - \mu) f^- \quad \text{donde } \mu = \frac{\Delta t_1}{\Delta t} \quad (2-42)$$

Siendo este el campo de velocidad de los estados en modo deslizante. El valor  $\mu$  regula que para cualquier punto sobre la superficie de discontinuidad, el campo de velocidad de los estados sea tangente a la superficie en ese punto, por lo que la derivada de la función de conmutación es igual a cero (ver figura 2-4). De ahí se puede obtener el valor de  $\mu$  así:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu = \frac{\frac{\partial S(x)}{\partial x} f^-}{\frac{\partial S(x)}{\partial x} (f^+ - f^-)} \\ \dot{x} = \frac{\frac{\partial S(x)}{\partial x} f^-}{\frac{\partial S(x)}{\partial x} (f^+ - f^-)} f^+ - \frac{\frac{\partial S(x)}{\partial x} f^+}{\frac{\partial S(x)}{\partial x} (f^- - f^+)} f^- \end{array} \right. \quad (2-43)$$

Este método no considera el deslizamiento solo en la variedad, sino en un pequeño espacio cerca de ella ( $\Delta$ ), por lo que describe un régimen deslizante real. Al considerar ese espacio, muestra que con estar muy cerca a la superficie de conmutación se puede considerar el modo deslizante, lo cual sucede en los sistemas físicos a causa de retardos, pequeñas constantes de tiempo, perturbaciones y otros fenómenos como la histéresis.

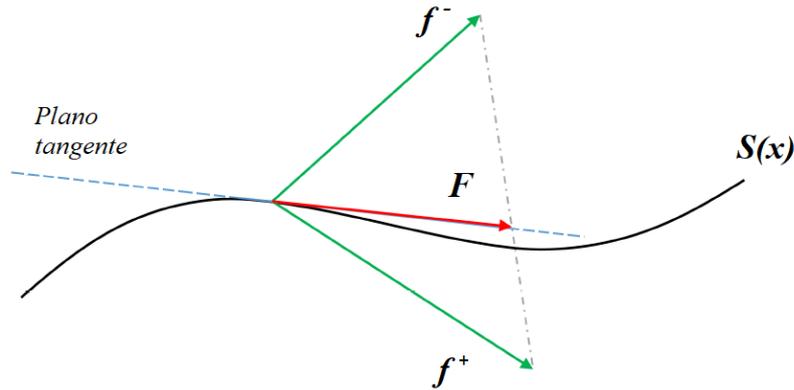


figura 2-4: Vector velocidad

### 2.8.5. Control equivalente

El método de control equivalente propone cambiar la ley de control discontinua por una suave que cumpla las siguientes condiciones de invarianza:

$$S(\mathbf{x}) = 0 \quad \dot{S}(\mathbf{x}) = \frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}, u_{eq}) = 0 \quad (2-44)$$

Estas condiciones buscan lo mismo del método de Filippov, llevar el campo de velocidad de los estados a la función de conmutación, garantizando que este se quede en la superficie de discontinuidad. Entonces las condiciones de invarianza describen el régimen deslizante ideal. Considerando el sistema (2-36) y (2-37), se tiene que:

$$S(\mathbf{x}) = 0 \quad \dot{S}(\mathbf{x}) = \frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}) + \frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} g(\mathbf{x}) u_{eq} = L_f S(\mathbf{x}) + L_g S(\mathbf{x}) u_{eq} = 0 \quad (2-45)$$

La función de control suave se despeja de la segunda ecuación:

$$u_{eq} = - \frac{\frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x})}{\frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} g(\mathbf{x})} = - \frac{L_f S(\mathbf{x})}{L_g S(\mathbf{x})} \quad (2-46)$$

El control equivalente  $u_{eq}$ , que se define a partir de la condición de transversalidad, sólo es válido sobre la superficie de conmutación. El control equivalente se puede ver como el valor promedio de la conmutación entre  $u^+$  y  $u^-$  a frecuencias altas.

Reemplazando el control equivalente en el sistema lineal se obtiene la dinámica de deslizamiento ideal.

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u_{eq} = f(x) + g(x) \frac{\frac{\partial S(x)}{\partial x} f(x)}{\frac{\partial S(x)}{\partial x} g(x)} \quad (2-47)$$

$$\dot{x} = F = \left[ I + g(x) \left( \frac{\partial S(x)}{\partial x} g(x) \right)^{-1} \frac{\partial S(x)}{\partial x} \right] f(x) = \Phi(x)f(x)$$

Donde  $\Phi(x)$  es un campo que proyecta el sistema  $f(x)$  sobre la superficie de deslizamiento, por lo que asegura la existencia del régimen deslizante.

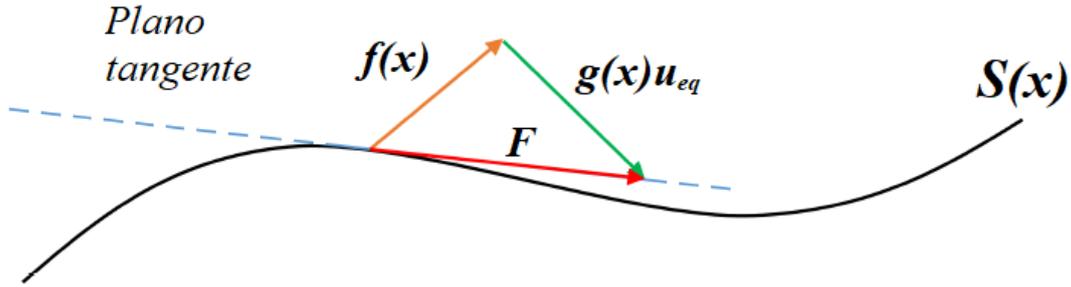


figura 2-5: Control Equivalente

La cual es válida sólo en la superficie de conmutación y describe el modo deslizante ideal. En la figura 2-5 se puede ver el cumplimiento del régimen de deslizamiento en algún punto sobre  $S(x)$  [75]. Como ejemplo se mirarán cada una de las condiciones que permiten el modo deslizante en un sistema lineal de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu \\ y &= C^T x \end{aligned} \quad (2-48)$$

Con la función de control discontinua y la siguiente función de conmutación:

$$u = \begin{cases} u^+(x, t) & \text{si } S(x) > 0 \\ u^-(x, t) & \text{si } S(x) < 0 \end{cases} \quad u^+ \neq u^- \quad (2-49)$$

definiendo

$$S(x) = y_{ref} - C^T x \quad (2-50)$$

Se realiza la identificación:

$$f(x) = Ax \quad g(x) = b \quad \frac{\partial S(x)}{\partial x} = -C^T \quad (2-51)$$

Analizando la condición de existencia:

$$\dot{S}(x) = \begin{cases} \frac{\partial S(x)}{\partial x} (f(x) + g(x)u^+) < 0 & \text{si } S(x) > 0 \\ \frac{\partial S(x)}{\partial x} (f(x) + g(x)u^-) > 0 & \text{si } S(x) < 0 \end{cases} \quad (2-52)$$

Aplicado al sistema (2-48) se expresa:

$$\dot{S}(x) = \begin{cases} -C^T (Ax + bu^+) < 0 & \text{si } S(x) > 0 \\ -C^T (Ax + bu^-) > 0 & \text{si } S(x) < 0 \end{cases} \quad (2-53)$$

Condición de transversalidad:

$$\frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} g(\mathbf{x}) < 0 \Rightarrow -C^T b < 0 \quad (2-54)$$

Control equivalente

$$u_{eq} = -\frac{\frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x})}{\frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} g(\mathbf{x})} = -\frac{C^T A \mathbf{x}}{C^T b} \quad (2-55)$$

Dinámica del deslizamiento ideal:

$$\dot{\mathbf{x}} = \left[ I + g(\mathbf{x}) \left( \frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} g(\mathbf{x}) \right)^{-1} \frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right] f(\mathbf{x}) \quad (2-56)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = [I - b(C^T b)^{-1}(-C^T)]A \mathbf{x} \quad \dot{\mathbf{x}} = A_\phi \mathbf{x}$$

En la figura 2-6 se muestra un diagrama de bloques del control por planos deslizante para el sistema (2-48).

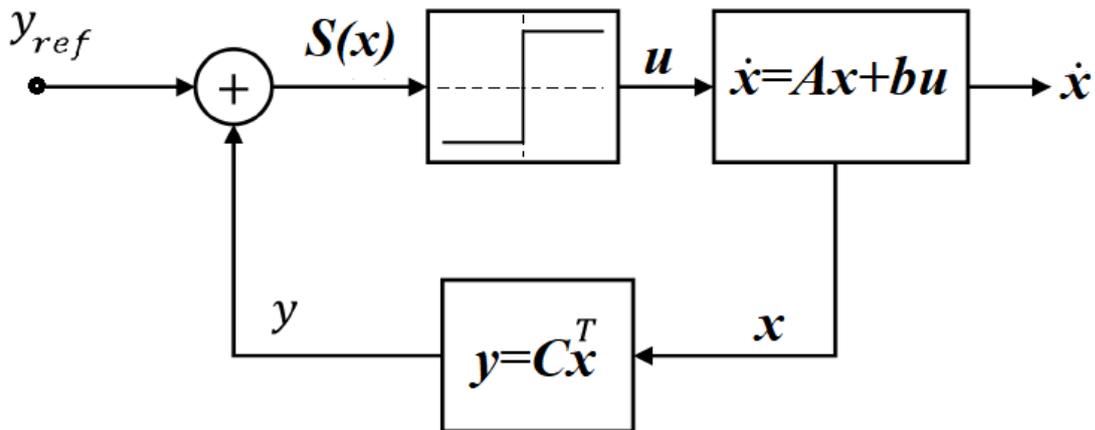


figura 2-6: Diagrama de bloques

Se puede definir también la técnica de control por planos deslizantes a través de la función de Lyapunov, verificando además el cumplimiento de estabilidad. Se define una función  $V(\mathbf{x})$ , llamada función de Lyapunov, tal que si cumple las siguientes condiciones:

$$V(\mathbf{x}) = 0 \quad V(\mathbf{x}) > 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq \bar{\mathbf{x}} \quad \dot{V}(\mathbf{x}) < 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq \bar{\mathbf{x}} \quad (2-57)$$

El sistema  $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$  es asintóticamente estable en el punto  $\bar{\mathbf{x}}$  (pto. de equilibrio). Se escoge la siguiente función de Lyapunov, tal que cumpla la primera y segunda condición

$$V(\mathbf{x}) = \frac{S^2(\mathbf{x})}{2} \quad (2-58)$$

Se evalúa entonces la tercera condición, derivando la función de Lyapunov. Nótese que corresponde a la condición de alcanzabilidad.

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = S(\mathbf{x})\dot{S}(\mathbf{x}) < 0 \quad (2-59)$$

Evaluando la condición con el sistema del ejemplo

$$S(\mathbf{x})(-C^T A \mathbf{x} - C^T b u) < 0 \quad (2-60)$$

Se requiere entonces una función  $u$ , tal que cumpla esta condición. Como  $S(\mathbf{x})$  puede ser positivo o negativo, se necesita asegurar el signo contrario para  $\dot{S}(\mathbf{x})$ , por lo que la función signo es perfecta para esta tarea.

$$u = \Gamma_u \text{sign}(S(\mathbf{x})) \Rightarrow S(\mathbf{x}) \left( -C^T A \mathbf{x} - C^T b \Gamma_u \text{sign}(S(\mathbf{x})) \right) < 0 \quad (2-61)$$

Si  $\Gamma_u$  es lo suficientemente grande, el signo de  $\dot{S}(\mathbf{x})$  va a estar marcado por la señal de control. Si  $S(\mathbf{x})$  es positiva, el valor de la función signo es 1, por lo que  $\dot{S}(\mathbf{x})$  será negativa; si  $S(\mathbf{x})$  es negativa, el valor de la función signo es -1, por lo que  $\dot{S}(\mathbf{x})$  será negativa.

$$S(\mathbf{x}) \left( -\Gamma_u \text{sign}(S(\mathbf{x})) \right) = -\Gamma_u |S(\mathbf{x})| < 0 \quad (2-62)$$

Esto conduce a que se cumple la tercera condición, por lo que el sistema es asintóticamente estable en el punto  $\bar{\mathbf{x}}$  [74]. Como el plano deslizante es de la forma:

$$S(\mathbf{x}) = y_{ref} - C^T \mathbf{x} \quad (2-63)$$

El punto  $\bar{\mathbf{x}}$  para el cual el sistema es asintóticamente estable estará definido por el valor de la señal de referencia  $y_{ref}$ . Se puede entonces tener una función de control compuesta por el control equivalente, el cuál actúa en la cercanía de la función de conmutación y asegura el régimen deslizante, y el control discontinuo, el cual lleva las variables de estado a las cercanías de la superficie de deslizamiento.

Esta composición debe realizarse con cuidado, debido a la forma de actuar de cada señal del control. Se pueden sumar las dos simplemente, y depender de la función discontinua del valor absoluto del plano deslizante para disminuir las oscilaciones al acercarse al plano, así como también depender de la función continua de la magnitud del plano para asegurar su operación en la región cercana al plano.

### 2.8.6. Robustez ante perturbaciones

Una propiedad importante de los planos deslizantes es la insensibilidad a las perturbaciones externas y paramétricas. Como estas se presentan en diferentes partes del sistema físico y del sistema de control, se analizará de nuevo las condiciones de control por planos deslizantes con perturbaciones externas y paramétricas. Si se considera un sistema escalar de la forma:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u + \delta \quad (2-64)$$

$$y = h(x) \quad (2-65)$$

Donde  $\delta$  corresponde a un vector de perturbaciones asociadas a la variación de los parámetros de la planta y  $\delta_E$  las perturbaciones externas. El vector  $\delta$  en el caso general puede escribirse como:

$$\delta = g(\mathbf{x})\mu + \delta_E(\mathbf{x}) \quad (2-66)$$

Donde  $g(\mathbf{x})\mu$  corresponde a las perturbaciones colineales de  $g(\mathbf{x})u$  y  $\delta_E(\mathbf{x})$  corresponde a las variaciones ortogonales a gradiente de la superficie de conmutación. Planteando las condiciones de invarianza:

$$\begin{aligned} \dot{S}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} (f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u'_{eq} + \delta) = \dots \\ &= \frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}) + \frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} g(\mathbf{x})u'_{eq} + \frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} (g(\mathbf{x})\mu + \delta_E(\mathbf{x})) \end{aligned} \quad (2-67)$$

Pero  $\delta_E(\mathbf{x})$  es ortogonal al gradiente, por lo tanto  $(\partial S(\mathbf{x})/\partial \mathbf{x})\delta_E(\mathbf{x}) = 0$

$$\dot{S}(\mathbf{x}) = \frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}) + \frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} g(\mathbf{x})u'_{eq} + \frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} g(\mathbf{x})\mu = 0 \quad (2-68)$$

Despejando  $u'_{eq}$  queda:

$$u'_{eq} = \frac{\frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x})}{\frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} g(\mathbf{x})} - \frac{\frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} g(\mathbf{x})\mu}{\frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} g(\mathbf{x})} = u_{eq} + \mu \quad (2-69)$$

El control equivalente en régimen deslizante del sistema con perturbaciones es igual al control equivalente del sistema sin perturbaciones menos la componente colineal de la perturbación. Analizando la dinámica de deslizamiento ideal:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u'_{eq} + \delta \\ \dot{\mathbf{x}} &= f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})(u_{eq} + \mu) + (g(\mathbf{x})\mu + \delta_E(\mathbf{x})) \\ \dot{\mathbf{x}} &= f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u_{eq} + \delta_E(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (2-70)$$

Las perturbaciones ortogonales al gradiente de la variedad afectan la dinámica ideal del modo deslizante, más no a la componente colineal a  $g(\mathbf{x})u$ .

De esto se puede concluir que si la perturbación del sistema es colineal a  $g(\mathbf{x})u$ , es decir  $\delta = g(\mathbf{x})\mu$ , la dinámica ideal es independiente de la perturbación, por lo que la propiedad de invarianza del modo deslizante es fuerte. Mientras que si la perturbación del sistema no es colineal a  $g(\mathbf{x})u$ , es decir  $\delta = \delta_E(\mathbf{x})$ , la dinámica ideal no es independiente de la perturbación, por lo que la propiedad de invarianza del modo deslizante es débil.

### 2.8.7. Elección de la superficie deslizante

El desarrollo de la técnica de control por planos deslizantes requiere de la elección de una superficie deslizante, la cual permitirá que el sistema evolucione hacia un valor de referencia específico. Varios autores han planteado diferentes superficies que logran el objetivo de control. Utkin la define como una combinación lineal de las variables de estado [58]:

$$S(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \quad (2-71)$$

Slotine plantea la superficie en función del error de seguimiento y sus derivadas [60]:  
Siendo una forma típica para la superficie de deslizamiento la siguiente (para un sistema SISO), que depende de un solo parámetro escalar,  $\lambda$ .

$$S = \left( \frac{d}{dt} + \lambda \right)^{r-1} e \quad (2-72)$$

Para distintos valores de  $(r - 1)$

$$(r - 1) = 1 \quad S = \dot{e} + \lambda e \quad (2-73)$$

$$(r - 1) = 2 \quad S = \ddot{e} + 2\lambda\dot{e} + \lambda^2 e \quad (2-74)$$

O también utilizando la integral del error de seguimiento, también conocida como control integral.

$$S = \left( \frac{d}{dt} + \lambda \right)^r \int e(\tau) d\tau \quad (2-75)$$

Donde  $r$  es el orden del sistema modelado a controlar, y el error  $e$  puede ser definido como

$$e(t) = y_{ref}(t) - y(t) \quad (2-76)$$

Para cada uno de las superficies mostradas se relacionan las ventajas de cada una de las acciones de control utilizadas, como rápida respuesta (acción proporcional), estabilidad (acción derivativa) y ausencia de error en estado estable (acción integral), sin olvidar la función discontinua (*sign(.)*) presente en el control.

## 2.9. Redes Neuronales Artificiales (RNA)

Las redes neuronales artificiales (también conocidas como sistemas conexionistas) se trata de un modelo computacional que consiste en un conjunto de unidades o funciones matemáticas simples, llamadas neuronas artificiales, conectadas entre sí para transmitirse señales. La información de entrada atraviesa la red neuronal (donde se somete a diversas operaciones) produciendo unos valores de salida.

Cada neurona está conectada con otras a través de unos enlaces. En estos enlaces el valor de salida de la neurona anterior es multiplicado por un valor de peso. Estos pesos en los enlaces pueden incrementar o inhibir el estado de activación de las neuronas adyacentes. Del mismo modo, a la salida de la neurona, puede existir una función limitadora o umbral, que modifica el valor resultado o impone un límite que no se debe sobrepasar antes de propagarse a otra neurona. Esta función se conoce como función de activación.

Estos sistemas aprenden y se forman a sí mismos, en lugar de ser programados de forma explícita, y sobresalen en áreas donde la detección de soluciones o características es difícil de expresar con la programación convencional. Para realizar este aprendizaje automático, normalmente, se intenta minimizar una función de costo que evalúa la red en su total. Los valores de los pesos de las neuronas se van actualizando buscando reducir el valor de la función de costo. Este proceso se realiza mediante la propagación hacia atrás.

El objetivo de la red neuronal es resolver los problemas de la misma manera que el cerebro humano, aunque las redes neuronales son más abstractas. Las redes neuronales actuales suelen contener desde unos miles a unos pocos millones de unidades neuronales.

Las redes neuronales artificiales (RNA) tienen muchas ventajas debido a que están basadas en la estructura del sistema nervioso, principalmente el cerebro.

- Aprendizaje: Las RNA tienen la habilidad de aprender mediante la etapa de aprendizaje. Consiste en proporcionar a la RNA datos como entrada a su vez que se le indica cuál es la salida esperada.
- Auto organización: Una RNA crea su propia representación de la información en su interior
- Tolerancia a fallos: Debido a que una RNA almacena la información de forma redundante, ésta puede seguir respondiendo de manera aceptable aun si se daña parcialmente.
- Flexibilidad: Una RNA puede manejar cambios no importantes en la información de entrada.
- Tiempo real: La estructura de una RNA es paralela, por lo cual si esto es implementado con computadoras, se pueden obtener respuestas en tiempo real

### 2.9.1. Red Neuronal MLP

El perceptrón multicapa o Multi Layer Perceptron (MLP) es una red neuronal artificial (RNA) formada por múltiples capas, de tal manera que tiene capacidad para resolver problemas que no son linealmente separables, lo cual es la principal limitación del perceptrón (también llamado perceptrón simple). Una red neuronal de este tipo está compuesta por un conjunto de varias neuronas distribuidas en una o varias capas, cuyas entradas y salidas están todas interconectadas. La primera capa, donde se aplican las señales de entrada  $x_i(t)$ , se conoce como capa de entrada; la última capa, donde se adquieren las señales de salida  $y_i(t)$ , se conoce como capa de salida; y todas las capas intermedias se conocen como capas ocultas.

En particular, nos interesa especialmente el perceptrón de dos capas que consiste en una sola capa oculta con  $m_1$  neuronas, todas alimentadas por las mismas señales de entrada  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ , una capa de salida con  $m_2$  neuronas que producen salidas  $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^{m_2}$ , el vector de las funciones de activación de la capa oculta  $\boldsymbol{\varphi}(\cdot) = [1, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{m_1}]^T \in \mathbb{R}^{m_1+1}$ , el vector de las funciones de activación de la capa de salida  $\bar{\boldsymbol{\varphi}}(\cdot) = [\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \dots, \bar{\varphi}_{m_2}]^T \in \mathbb{R}^{m_2}$ , una matriz de pesos de entrada  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{(m_2+1) \times m_1}$  dada por

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} W_{01} & \dots & W_{0m_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{n1} & \dots & W_{nm_1} \end{bmatrix} \quad (2-77)$$

y una matriz de pesos de salida  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{(m_1+1) \times m_2}$  dada por

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_{01} & \dots & w_{0m_2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{m_21} & \dots & w_{m_2m_2} \end{bmatrix} \quad (2-78)$$

La red neuronal de dos capas se describe gráficamente en la figura 2-7 y su modelo matemático es el siguiente

$$\mathbf{y}(t) = \bar{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{w}^T \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{W}^T \mathbf{x})) \quad (2-79)$$

Considerando las funciones de activación de la capa de salida  $\bar{\boldsymbol{\varphi}}(\cdot)$  como un vector de funciones lineales, el modelo matemático general de la red neuronal dado en (2-79) puede ser simplificado como

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{W}^T \mathbf{x}) \quad (2-80)$$

Esta expresión será útil en los próximos capítulos para la aproximación de funciones en combinación con otro tipo de redes neuronales.

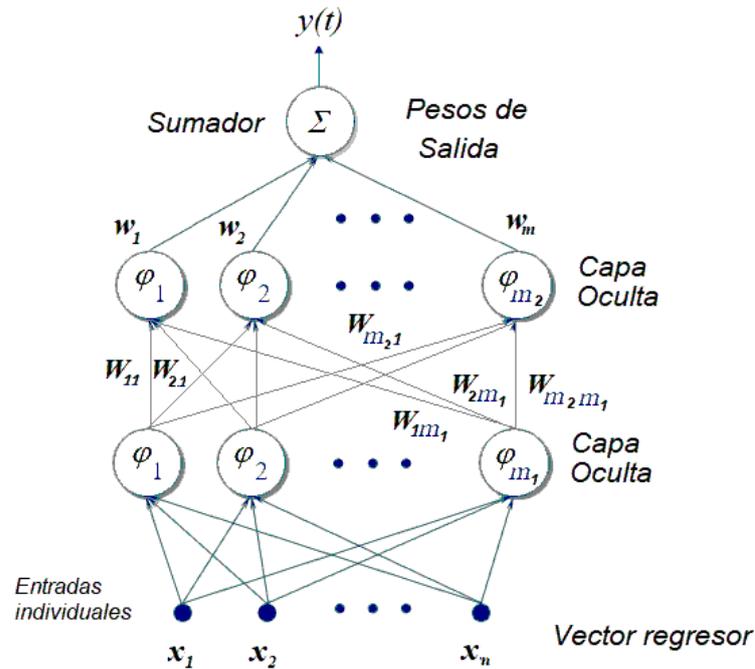


figura 2-7: estructura de una red perceptrón multicapa (dos capas ocultas)

### 2.9.2. Funciones de activación:

Las funciones que gobiernan el comportamiento de la neurona artificial se llaman funciones de activación ( $\varphi(\cdot)$ ). La transmisión de esa entrada se conoce como propagación hacia adelante (forward propagation). Las funciones de activación transforman la combinación de entradas, pesos y sesgos. Los productos de estas transformaciones se ingresan para la siguiente capa de nodo. Muchas (aunque no todas) las transformaciones no lineales usadas en redes neuronales transforman los datos a rango conveniente, por ejemplo  $[0,1]$  ó  $[-1,1]$ . Cuando una neurona artificial pasa de un valor distinto de cero a otro, decimos que esa neurona se ha activado

Las funciones de activación se usan para propagar la salida de los nodos de una capa hacia la siguiente capa. Se tratan de funciones escalares a escalar, que produce la activación de la neurona. Este tipo de funciones permiten incorporar el modelado de datos de entrada no lineales a la red.

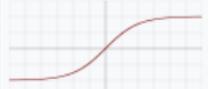
<b>Lineal</b>		$\varphi(x) = x$
<b>Escalon binario</b>		$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0 \\ 1 & \text{para } x \geq 0 \end{cases}$
<b>Sigmoide</b>		$\varphi(x) = \sigma(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$
<b>Tanh</b>		$\varphi(x) = \tanh(x) = \frac{(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})}$

figura 2-8: funciones de activación para redes neuronales del tipo MLP

La familia de *funciones sigmoideas* es la más utilizada en redes del tipo MLP junto con la salida lineal, en esta tesis serán aplicadas en identificación de sistemas.

### 2.9.3. Red Neuronal RBF

Como se mencionó anteriormente, una red neuronal artificial es una representación matemática de una red neuronal biológica. Este modelo matemático describe el proceso biológico de procesamiento de la información a través del sistema nervioso y su unidad básica de procesamiento, la neurona. La salida  $y(t) \in \mathbb{R}$  de cada neurona es igual al valor resultante de la función de activación no lineal  $\varphi_i(\mathbf{x})$ , y cada una multiplicada por cada coeficiente de ponderación  $w_1, w_2, \dots, w_m$ , respectivamente, donde cada  $w_i \in \mathbb{R}$  es el elemento del vector de pesos. Por lo tanto, el modelo matemático de una neurona puede expresarse como

$$y(t) = \mathbf{W}^T \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m w_i \varphi_i(\mathbf{x}) \quad (2-81)$$

donde  $\mathbf{x} = [1, x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^{n+1}$  es el vector regresor de entrada aumentado y  $\mathbf{W} = [w_1, w_2, \dots, w_m]^T \in \mathbb{R}^{m \times 1}$  es el vector de pesos de salida. Y  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$  es el vector que contiene cada función de activación gaussiana  $\varphi_i(\mathbf{x})$ , es la función de activación elemental o función de base radial (RBF), que constituyen las neuronas de esta topología de red. El valor  $m$  constituye el número de neuronas de la red. La cada neurona RBF está se representa por una campana de gauss, y se indica por:

$$\varphi_i(\mathbf{x}) = \exp(-\|\mathbf{x} - \mathbf{c}_i\|/\sigma_i) \quad (2-82)$$

donde  $\mathbf{c}_i$  y  $\sigma_i$  son parámetros de la función gaussiana, siendo  $\mathbf{c}_i \in \mathbb{R}^{n+1}$  el vector de centros asociado a cada función o neurona elemental  $i$  y  $\sigma_i \in \mathbb{R}^+$  es la apertura o ancho de la función gaussiana. Esta red neuronal artificial se denomina Red Neuronal de Base Radial [60] y su descripción gráfica se da en la figura 2-9

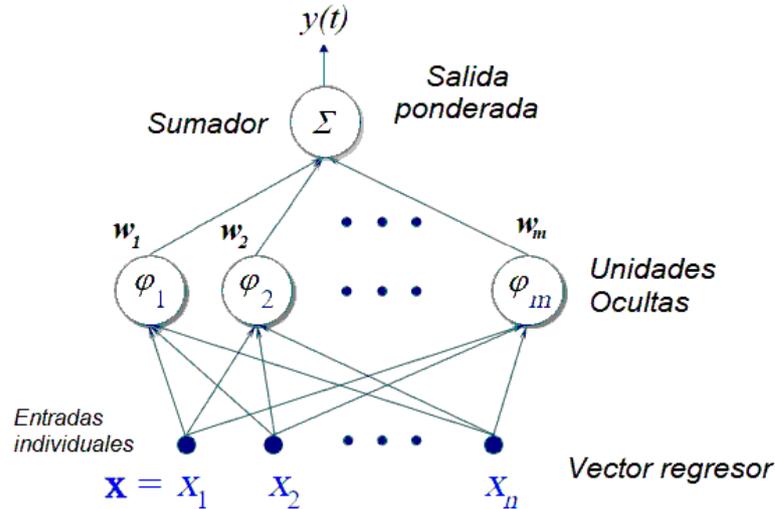


figura 2-9: Estructura de una red de base radial (RBF)

En resumen, una red neuronal está compuesta por un conjunto de varias neuronas distribuidas en una (o varias capas), cuyas entradas y salidas están interconectadas. La primera capa, donde se aplican las señales de entrada  $\mathbf{x}$ , se conoce como capa de entrada; la última capa, donde se adquieren las señales de salida  $y(t)$ , se

conoce como capa de salida; y todas las capas entre ellas se conocen como capas ocultas ( $\varphi(\mathbf{x})$ ).

### 2.9.4. Red Neuronal GRNN

La red neuronal de regresión generalizada (GRNN) es una variación de las redes neuronales de base radial. La GRNN fue sugerida a principio de la década de los 90, como una alternativa a las RBFNN. Estas redes pueden utilizarse para la regresión, la predicción y la clasificación. GRNN también puede ser una buena solución para los sistemas dinámicos en línea. Las GRNN representan una técnica mejorada en las redes neuronales basada en la regresión no paramétrica. La idea es que cada muestra de entrenamiento represente una media para una neurona de base radial [61]. La estructura de una red GRNN se puede observar en la figura 2-10.

Una GRNN, que de acuerdo con el teorema de aproximación universal [62], [63] [65], se utiliza para aproximar cualquier función continua de la siguiente manera

$$y(t) = \mathbf{W}^T \mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{c}, \sigma) = \sum_{i=1}^m W_i H_i(\mathbf{x}) \quad (2-83)$$

donde  $\mathbf{x} = [1, x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^{n+1}$  es el vector regresor de entrada para la GRNN,  $\mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{c}, \sigma) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$  es un vector de funciones de activación de base radial definido como

$$H_i(\mathbf{x}, \mathbf{c}_i, \sigma_i) = \frac{\exp(\|\mathbf{x} - \mathbf{c}_i\|/2\sigma_i)}{\sum_{j=1}^m \exp(\|\mathbf{x} - \mathbf{c}_j\|/2\sigma_j)} \quad (2-84)$$

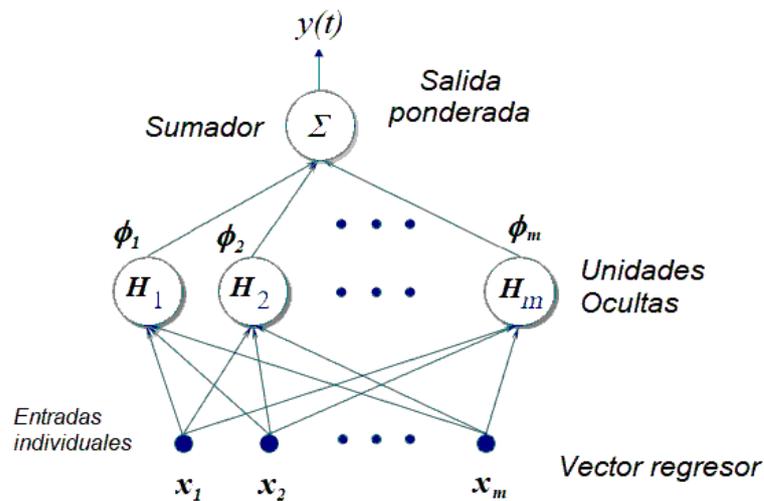


figura 2-10: Esquema básico de una red neuronal de regresión generalizada (GRNN)

Como en el caso anterior,  $\mathbf{c}_i$  y  $\sigma_i$  son parámetros de la función gaussiana, siendo  $\mathbf{c}_i \in \mathbb{R}^{n+1}$  el vector de centros asociado a cada función o neurona elemental  $i$  y cada  $\sigma_i \in \mathbb{R}^+$  es la apertura o ancho de la función gaussiana, donde  $m$  es el número de neuronas, e  $\Phi \in \mathbb{R}^{m \times 1}$  es la matriz de pesos asociados a la función  $\mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{c}, \sigma)$ . La GRNN es una variación de la red neuronal de función de base radial donde la salida de cada neurona es dividida por las sumatoria de las salidas de todas las neuronas de la red, siendo esto, la respuesta de la función de activación de la GRNN está normalizada. Como se puede observar en la ecuación (2-84).

Está compuesta por cuatro capas: una capa de entrada, una capa oculta, una capa de suma y una capa de salida. Las funciones de gaussianas están contenidas en la capa oculta. La red GRNN tiene las siguientes ventajas:

- Aprendizaje de una sola pasada por lo que no se requiere retropropagación.
- Alta precisión en la estimación ya que utiliza funciones gaussianas.
- Puede manejar ruidos en las entradas.
- Requiere un número menor de conjuntos de datos.

### 2.9.5. Propiedad universal de aproximación de funciones

Tanto las redes MLP, RBF y GRNN son aproximadores universales. Las de las redes neuronales gaussianas (RBF, GRNN, etc.) dependen de las distancias euclidianas entre el vector de entrada  $\mathbf{x}$  y los centros  $\mathbf{c}_i$ . Por su parte, las redes neuronales sigmoidales (MLP, etc) dependen del producto interno del vector de entrada  $\mathbf{x}$  con los vectores de pesos sinápticos  $w_i$ .

Las de las redes neuronales del tipo sigmoidales proporcionan una aproximación

$$\|error_{approx}\| \approx O\left(m^{-\frac{1}{2}}\right) \quad (2-85)$$

que no depende explícitamente de la dimensión del vector de entrada  $\mathbf{x}$  pero si del número de neuronas  $m$ . Por otro lado, la tasa de aproximación de las redes neuronales del tipo gaussianas es del orden

$$\|error_{approx}\| \approx O\left(m^{-\frac{1}{2n}}\right) \quad (2-86)$$

y, en consecuencia, disminuye exponencialmente a medida que aumenta la dimensión del vector de entrada  $\mathbf{x}$ . Este fenómeno se denomina la Maldición de la Dimensionalidad, (debido a R. Bellman).

Una red de base gaussiana tiene soporte local ( $\mathbf{c}_i$  y  $\sigma_i$ ) mientras que un sigmoide no lo tiene. El soporte local implica la capacidad de aprendizaje y adaptación las redes neuronales gaussianas. Las redes neuronales sigmoidales se adaptan, pero no aprenden.

En lo que respecta específicamente a las redes neuronales aplicadas al control, su capacidad para representar mapeos no lineales y, por tanto, para modelar sistemas no lineales, es la característica que más fácilmente se puede explotar en la síntesis de controladores no lineales.

## 2.10. Identificación de sistemas utilizando redes neuronales artificiales.

Las redes neuronales artificiales han sido usadas para la identificación de sistemas aprovechando las propiedades que tienen de ser aproximadores universales de funciones [66]. Cuando las redes neuronales se han usado para el modelado de sistemas dinámicos, generalmente el entrenamiento de las redes neuronales se realiza minimizando el error que existen entre la salida de la red y la salida real. Algunos autores han aplicado el concepto de regularización para mejorar la calidad del modelo que se está obteniendo [66] [67]. El entrenamiento ha sido usado para mejorar la capacidad de la generalización de las redes neuronales y de otras máquinas de aprendizaje como los sistemas neuro difusos [67]. Esta sección comienza con los conceptos generales del aprendizaje e identificación de sistemas dinámicos usando redes neuronales artificiales de base gaussiana. A continuación, se muestra el procedimiento para identificar sistemas SISO y MIMO. El objetivo es identificar un sistema y utilizar un entrenamiento basado en reglas de ajuste obtenidas por la teoría de estabilidad de Lyapunov, las cuales brindan la capacidad de generalización de los modelos neuronales para su aplicación en control.

### 2.10.1. Identificación de sistemas SISO

Considerando el sistema modelado por:

$$\dot{x} = f(x(t), u(t)) \quad x(0) = x_0 \quad (2-87)$$

Es desconocido y posiblemente una función no lineal de  $x$  en  $u$ . Se procederá a identificar el sistema, sumando y restando  $ax(t)$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -ax + ax + f(x(t), u(t)) = \dots \\ &= \dot{x}(t) = -ax + g(x(t), u(t)) \end{aligned} \quad (2-88)$$

Siendo  $g(x(t), u(t)) = ax + f(x(t), u(t))$ . Usando un estimador definido por:

$$\dot{\hat{x}}(t) = -a\hat{x} + \hat{g}(x(t), u(t), \mathbf{c}, \sigma) \quad \hat{x}(0) = x_0 \quad (2-89)$$

Donde  $\hat{x}$  es el vector de estados del identificador  $\mathbf{c}$  y  $\sigma$  son los parámetros de la función:

$$\hat{g}(x(t), u(t), m, \sigma) = \sum_{k=1}^N w_k \phi(x, u, \mathbf{c}_k, \sigma_k) \quad (2-90)$$

Siendo la función

$$\phi(x, u, \mathbf{c}_k, \sigma_k) = \exp\left(-\frac{1}{2}[(x(t) - c_{xk})^2 + (u(t) - c_{uk})^2]\right) \quad (2-91)$$

Suponiendo que conocemos los pesos óptimos, resulta que el menor error de aproximación es:

$$\varepsilon = g(x(t), u(t)) - \sum_{k=1}^N w_k^* \phi(x, u, \mathbf{c}_k, \sigma_k) \quad (2-92)$$

Ahora representando el modelo dinámico indicado en (2-88) como:

$$\dot{x}(t) = -ax + \sum_{k=1}^N w_k^* \phi(x, u, \mathbf{c}_k, \sigma_k) + \varepsilon \quad (2-93)$$

El estimador neuronal puede ser representado como:

$$\dot{\hat{x}}(t) = -a\hat{x} + \sum_{k=1}^N w_k \phi(x, u, \mathbf{c}_k, \sigma_k) \quad (2-94)$$

Definiendo el error de aproximación como:

$$e = x - \hat{x} \quad (2-95)$$

De la misma forma para los pesos  $\tilde{w}_k = w_k^* - w_k$  para  $k = 1, 2, 3, \dots, N$ , derivando el error:

$$\begin{aligned} \dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} &= -ax + \sum_{k=1}^N w_k^* \varphi(x, u, \mathbf{c}_k, \sigma_k) + \varepsilon + a\hat{x} - \sum_{k=1}^N w_k \varphi(x, u, \mathbf{c}_k, \sigma_k) = \\ &= -ae + \sum_{k=1}^N \tilde{w}_k \varphi(x, u, \mathbf{c}_k, \sigma_k) + \varepsilon \end{aligned} \quad (2-96)$$

Asumimos que  $|\varepsilon| \leq \bar{\varepsilon}$  es desconocido pero acotado.

Ahora aplicando Lyapunov, definiendo la función candidata de la forma:

$$V(e, \tilde{w}_k) = \frac{1}{2} \left( e^2 + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^N (\tilde{w}_k)^2 \right) \quad (2-97)$$

Donde  $\alpha > 0$  y  $\tilde{\mathbf{w}} = [\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \dots, \tilde{w}_N]$ , derivando (2-97) con respecto al tiempo:

$$\dot{V}(e, \tilde{w}_k) = e\dot{e} + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^N \tilde{w}_k \cdot \dot{\tilde{w}}_k \quad (2-98)$$

Ahora reemplazando la ecuación del error (2-96) en (2-98)

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, \tilde{w}_k) &= e \left( -ae + \sum_{k=1}^N \tilde{w}_k \varphi(x, u, \mathbf{c}_k, \sigma_k) + \varepsilon \right) + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^N \tilde{w}_k \cdot \dot{\tilde{w}}_k = \dots \\ &= -ae^2 + \sum_{k=1}^N e \tilde{w}_k \varphi(x, u, \mathbf{c}_k, \sigma_k) + e\varepsilon + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^N \tilde{w}_k \cdot \dot{\tilde{w}}_k \end{aligned} \quad (2-99)$$

Agrupando términos:

$$\dot{V}(e, \tilde{w}_k) = -ae^2 + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^N \tilde{w}_k (e\varphi(x, u, \mathbf{c}_k, \sigma_k) + \dot{\tilde{w}}_k) + e\varepsilon \quad (2-100)$$

Ahora definiendo la regla de ajuste como:

$$\dot{\tilde{w}}_k = -\alpha e \varphi(x, u, \mathbf{c}_k, \sigma_k) \quad (2-101)$$

Si reemplazo (2-101) en (2-100) queda:

$$\dot{V}(e, \tilde{w}_k) = -ae^2 + e\varepsilon \quad (2-102)$$

Evaluando la ecuación anterior y reemplazando la cota del error  $\bar{\varepsilon}$ .

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, \tilde{w}_k) &= -a|e|^2 + |e|\bar{\varepsilon} = \dots \\ &= -a|e| \left( |e| - \frac{\bar{\varepsilon}}{a} \right) \end{aligned} \quad (2-103)$$

Si  $|e| > \frac{\bar{\varepsilon}}{a}$  entonces  $\dot{V}(e, \tilde{w}_k) \leq 0$  por lo tanto es uniformemente estable. Pero si por alguna perturbación  $|e| < \frac{\bar{\varepsilon}}{a}$  el ajuste de pesos puede dispararse al infinito. Para

solucionar este problema, se propuso ajustar  $\dot{\tilde{w}}_k = 0$  si  $|e| < \frac{\bar{\epsilon}}{a}$ . Pero  $\bar{\epsilon}$  es desconocido. Se impone un valor arbitrario pequeño y el ajuste queda definido por:

$$\dot{w}_k = \begin{cases} \alpha e \varphi(x, u, \mathbf{c}_k, \sigma_k) & \text{si } |e| > \epsilon_0 \text{ y } \|\mathbf{w}\| \leq M \\ 0 & \text{en otro lugar} \end{cases} \quad (2-104)$$

### 2.10.2. Identificación de Sistemas MIMO.

Repasando la definición de traza de una matriz cuadrada. Si  $\mathbf{\Gamma} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , la norma de Frobenius satisface:

$$\|\mathbf{\Gamma}\|_F^2 = \sum_{i=1}^n \gamma_{ii}^2 = \text{trace}(\mathbf{\Gamma}\mathbf{\Gamma}^T) \quad (2-105)$$

Si los elementos  $\gamma_{ii}$ , de  $\mathbf{\Gamma}$  son funciones del tiempo, entonces:

$$\frac{d}{dt}(\text{trace}(\mathbf{\Gamma}\mathbf{\Gamma}^T)) = 2 \sum_{i=1}^n \gamma_{ii} \dot{\gamma}_{ii} = 2 \text{trace}(\mathbf{\Gamma}\dot{\mathbf{\Gamma}}^T) \quad (2-106)$$

Con esta aclaración se puede proceder al análisis de identificación de un sistema MIMO.

Ahora considerando el sistema multivariable que puede ser considerado de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (2-107)$$

Donde  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  y  $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  siendo la función a ser identificada: Definimos una matriz Hurwitz  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  donde los autovalores de la matriz se encuentran en el semiplano izquierdo. Por el teorema de Lyapunov, para toda matriz simétrica definida positiva  $\mathbf{Q}$  existe la solución  $\mathbf{P}$  para la ecuación matricial de Lyapunov.

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -2\mathbf{Q} \quad (2-108)$$

Donde  $\mathbf{Q}$  es otra matriz definida positiva.

Se procederá a identificar el sistema, sumando y restando  $\mathbf{A}\mathbf{x}(t)$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= -\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = \dots \\ &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \end{aligned} \quad (2-109)$$

Siendo  $\mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = -\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ . Ahora definiendo la  $i$ -ésima función RBF como:

$$\varphi_i(x, u, \mathbf{c}, \sigma) = \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left\| \begin{pmatrix} x \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} - \mathbf{c}_i \right\|^2\right) \quad (2-110)$$

Donde el vector  $\boldsymbol{\varphi}$  está representado por:

$$\boldsymbol{\varphi}(x, u) = [\varphi_1(x, u), \varphi_2(x, u), \dots, \varphi_N(x, u)] \quad (2-111)$$

Siendo la función

$$\hat{\mathbf{g}}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{c}, \sigma) = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\varphi}(x, u) \quad (2-112)$$

Donde

$$\mathbf{c}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_x \\ \mathbf{c}_u \end{pmatrix} \quad (2-113)$$

Usando un estimador neuronal definido por:

$$\hat{\dot{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{c}, \sigma) \quad (2-114)$$

Donde el vector de pesos óptimos que minimiza la norma del error de identificación es:

$$\mathbf{w}^* = \underset{\mathbf{w}}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) - \mathbf{w}^T \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{c}, \sigma)\| \quad (2-115)$$

Sabemos que:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) - \mathbf{w}^{*T} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{c}, \sigma) \quad (2-116)$$

Podemos representar el modelo como:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{w}^{*T} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{c}, \sigma) + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2-117)$$

Definiendo el error de estimación y de pesos como  $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$  y  $\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{w} - \hat{\mathbf{w}}$  construimos la ecuación diferencial describiendo la dinámica del sistema.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{w}^{*T} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{c}, \sigma) + \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{w}^T \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{c}, \sigma) = \dots \\ &= \mathbf{A}\mathbf{e} + \tilde{\mathbf{w}}^T \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{c}, \sigma) + \boldsymbol{\varepsilon} \end{aligned} \quad (2-118)$$

Ahora aplicando Lyapunov, definiendo la función candidata de la forma:

$$V(\mathbf{e}, \tilde{\mathbf{w}}) = \frac{1}{2} \left( \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{e} + \frac{1}{\alpha} \operatorname{tr}(\tilde{\mathbf{w}}^T \tilde{\mathbf{w}}) \right) \quad (2-119)$$

derivando (2-119) con respecto al tiempo:

$$\dot{V}(\mathbf{e}, \tilde{\mathbf{w}}) = \mathbf{e}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{e}} + \frac{1}{\alpha} \operatorname{tr}(\tilde{\mathbf{w}}^T \dot{\tilde{\mathbf{w}}}) \quad (2-120)$$

Reemplazando la ecuación del error (2-118) en la ec. anterior

$$\dot{V}(\mathbf{e}, \tilde{\mathbf{w}}) = \mathbf{e}^T \mathbf{P} (\mathbf{A}\mathbf{e} + \tilde{\mathbf{w}}^T \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{c}, \sigma) + \boldsymbol{\varepsilon}) + \frac{1}{\alpha} \operatorname{tr}(\tilde{\mathbf{w}}^T \dot{\tilde{\mathbf{w}}}) \quad (2-121)$$

Operando

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\mathbf{e}, \tilde{\mathbf{w}}) &= \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{w}}^T \boldsymbol{\varphi}(x, u, \mathbf{c}, \sigma) + \mathbf{e}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{\alpha} \text{tr}(\tilde{\mathbf{w}}^T \dot{\tilde{\mathbf{w}}}) = \dots \\
&= \frac{1}{2} \mathbf{e}^T (\mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P}) \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{w}}^T \boldsymbol{\varphi}(x, u, \mathbf{c}, \sigma) + \mathbf{e}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{\alpha} \text{tr}(\tilde{\mathbf{w}}^T \dot{\tilde{\mathbf{w}}}) = \quad (2-122) \\
&= -\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} + \text{tr}(\mathbf{e}^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{w}}^T \boldsymbol{\varphi}(x, u, \mathbf{c}, \sigma)) + \mathbf{e}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{\alpha} \text{tr}(\tilde{\mathbf{w}}^T \dot{\tilde{\mathbf{w}}})
\end{aligned}$$

Usando la propiedad cíclica del operador traza

$$\text{tr}(\mathbf{e}^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{w}}^T \boldsymbol{\varphi}(x, u, \mathbf{c}, \sigma)) = \text{tr}(\tilde{\mathbf{w}}^T \boldsymbol{\varphi}(x, u, \mathbf{c}, \sigma) \mathbf{e}^T \mathbf{P}) \quad (2-123)$$

Reemplazando en (2-122) queda

$$\dot{V}(\mathbf{e}, \tilde{\mathbf{w}}) = -\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} + \frac{1}{\alpha} \text{tr}[\tilde{\mathbf{w}}^T (\alpha \boldsymbol{\varphi}(x, u, \mathbf{c}, \sigma) \mathbf{e}^T \mathbf{P} + \dot{\tilde{\mathbf{w}}})] + \mathbf{e}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2-124)$$

Definiendo la regla de ajuste de la forma.

$$\dot{\tilde{\mathbf{w}}} = -\alpha \boldsymbol{\varphi}(x, u, \mathbf{c}, \sigma) \mathbf{e}^T \mathbf{P} \quad (2-125)$$

Reemplazando (2-125) en (2-124) queda

$$\dot{V}(\mathbf{e}, \tilde{\mathbf{w}}) = -\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2-126)$$

Aplicando propiedad norma:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\mathbf{e}, \tilde{\mathbf{w}}) &\leq -\lambda_{\min}(\mathbf{Q}) \|\mathbf{e}\|^2 + \|\mathbf{e}\| \lambda_{\max}(\mathbf{P}) \bar{\varepsilon} = \dots \\
&= -\lambda_{\min}(\mathbf{Q}) \|\mathbf{e}\| \left( \|\mathbf{e}\| - \frac{\lambda_{\max}(\mathbf{P})}{\lambda_{\min}(\mathbf{Q})} \bar{\varepsilon} \right) \quad (2-127)
\end{aligned}$$

Siendo la condición de estabilidad

$$\|\mathbf{e}\| \geq \frac{\lambda_{\max}(\mathbf{P})}{\lambda_{\min}(\mathbf{Q})} \bar{\varepsilon} \quad (2-128)$$

Para el caso anterior, entonces  $\dot{V}(\mathbf{e}, \tilde{\mathbf{w}}_k) \leq 0$  por lo tanto es uniformemente estable. Al igual para el caso SISO, si por alguna perturbación  $\|\mathbf{e}\| < \frac{\lambda_{\max}(\mathbf{P})}{\lambda_{\min}(\mathbf{Q})} \bar{\varepsilon}$  el ajuste de pesos puede dispararse al infinito. Para solucionar este problema, se propuso ajustar  $\dot{\tilde{\mathbf{w}}}_k = 0$  si  $\|\mathbf{e}\| < \frac{\lambda_{\max}(\mathbf{P})}{\lambda_{\min}(\mathbf{Q})} \bar{\varepsilon}$ . Pero  $\bar{\varepsilon}$  es desconocido. Se impone un valor arbitrario pequeño y el ajuste queda definido por:

$$\dot{\tilde{\mathbf{w}}}_k = \begin{cases} \alpha \boldsymbol{\varphi}(x, u, \mathbf{c}, \sigma) \mathbf{e}^T \mathbf{P} & \text{si } \|\mathbf{e}\| \geq \varepsilon_0 \text{ y } \|\mathbf{w}\| \leq M \\ 0 & \text{en otro lugar} \end{cases} \quad (2-129)$$

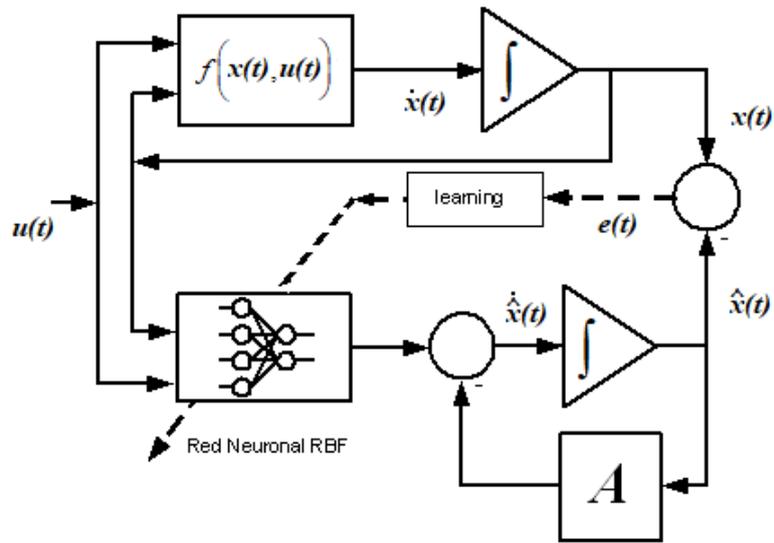


figura 2-11:esquema de identificación.

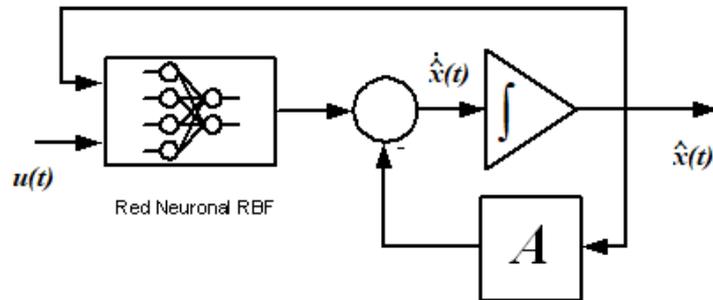


figura 2-12:Esquema de operación.

## Capítulo 3. Controlador neuro-adaptable de modo deslizante para seguimiento de trayectorias en robots móviles

### 3.1. Resumen.

En este capítulo se propone un método de control neural indirecto en modo deslizante para robots móviles. Debido a la propiedad no holonómica y a la movilidad restringida, el seguimiento de la trayectoria de este sistema ha sido uno de los temas de investigación en los últimos años. La estructura de control propuesta combina un modelo de linealización de retroalimentación, basado en un modelo nominal de cinemática, y un diseño práctico que combina una técnica de adaptación neural indirecta con un control de modo deslizante (NA-SMC) para compensar la dinámica del robot. Mediante un esquema de adaptación en línea, se utiliza un controlador neural de modo deslizante para aproximar el control equivalente en la vecindad de la superficie de deslizamiento.

Se añade un control deslizante para garantizar que el control neuronal adaptable pueda lograr un sistema estable de lazo cerrado para el control de seguimiento de la trayectoria de un robot móvil con una dinámica no lineal desconocida. El diseño propuesto garantiza simultáneamente la estabilidad de la adaptación de las redes neuronales y obtiene un control equivalente adecuado cuando los parámetros del modelo del robot son desconocidos de antemano. El esquema adaptativo robusto se aplica a un robot móvil y se demuestra que es capaz de garantizar que el error de seguimiento de la salida converja a cero.

### 3.2. Modelo del Robot:

En esta sección se describen los modelos matemáticos discretos (3-1) y (3-2). Fueron propuestos por [68] y [29] y esta implementación matemática permite considerar las velocidades lineales y angulares de referencia como señales de entrada. En estas ecuaciones,  $t$  es el tiempo. Los parámetros identificados para el robot móvil Pioneer 2DX ( $\vartheta_1$  a  $\vartheta_6$ ) se describen en [29]. La figura 3-1 muestra el robot móvil no holonómico con parámetros y variables de interés, donde  $\mathbf{u}(t) = [u_v(t), u_\omega(t)]^T$  son entradas de acción controladas, las coordenadas  $x$ ,  $y$  definen la posición del WMR en el plano XY, expresadas en forma vectorial como  $\mathbf{y}(t) = [x(t), y(t)]^T$ , y el ángulo  $\psi$  representa la orientación del robot en el plano XY. Las velocidades de salida se indican como  $v$  y  $\omega$ , y son las velocidades de salida lineal y velocidades lineales y angulares de salida, respectivamente. Otros parámetros del robot son  $c$  es la ubicación de la rueda libre trasera (rueda giratoria),  $G$  es el centro de masas y  $a$  es la distancia entre el punto  $r(x, y)$  y el eje virtual de las ruedas de tracción.

Los modelos matemáticos son los siguientes.

Modelo cinemático discreto

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{\psi}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\psi(t)) & -a\sin(\psi(t)) \\ \sin(\psi(t)) & a\cos(\psi(t)) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_x(t) \\ \delta_y(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3-1)$$

Modelo dinámico discreto

$$\begin{pmatrix} \dot{v}(t) \\ \dot{\omega}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\vartheta_3}{\vartheta_1} \omega^2(t) - \frac{\vartheta_4}{\vartheta_1} v(t) \\ -\frac{\vartheta_5}{\vartheta_2} \omega(t)v(t) - \frac{\vartheta_6}{\vartheta_2} \omega(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\vartheta_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\vartheta_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{ref}(t) \\ \omega_{ref}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_v(t) \\ \delta_\omega(t) \end{pmatrix} \quad (3-2)$$

Las incertidumbres asociadas al WMR son  $\delta_v$ ,  $\delta_\omega$ ,  $\delta_x$  y  $\delta_y$ , donde  $\delta_v$  y  $\delta_\omega$  son funciones de las velocidades de deslizamiento y de la orientación del robot,  $\delta_v$  y  $\delta_\omega$  dependen de parámetros físicos, por ejemplo: la masa de la carga del robot, la inercia, las dimensiones de las ruedas y los neumáticos, los parámetros del motor de corriente continua y de sus actuadores eléctricos, las fuerzas de reacción sobre las ruedas, etc. Estos parámetros se consideran perturbaciones externas.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\vartheta} &= (\vartheta_1 \quad \vartheta_2 \quad \vartheta_3 \quad \vartheta_4 \quad \vartheta_5 \quad \vartheta_6)^T \\ \boldsymbol{\delta} &= (\delta_x \quad \delta_y \quad 0 \quad \delta_v \quad \delta_\omega)^T \end{aligned} \quad (3-3)$$

El modelo del robot presentado en (3-1) y (3-2) se divide en una parte cinemática y otra dinámica, respectivamente, como se muestra en la figura 3-1. Por lo tanto, se utilizan dos controladores en cascada, el primero se propone en la cinemática inversa, y el segundo se basa en el SMC neuroadaptativo, para la parte cinemática y parte de la dinámica del sistema del robot.

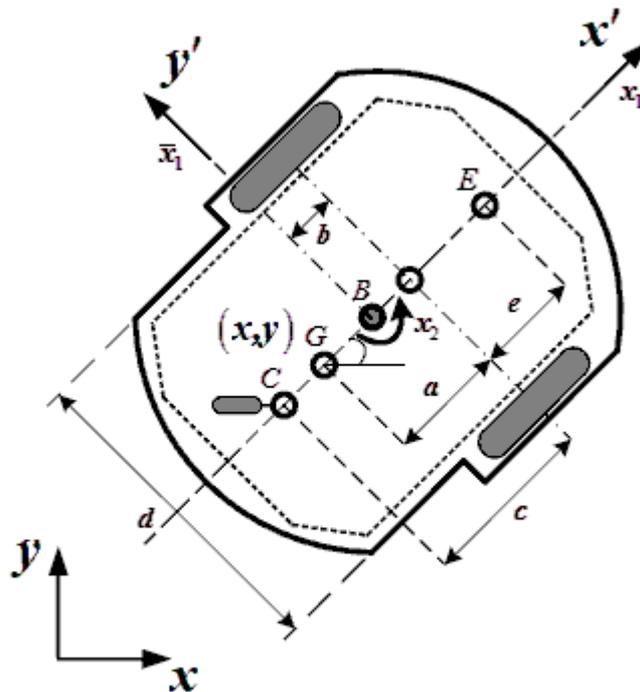


figura 3-1: Parámetros del Robot Pioneer

**Consideración 1:** las incertidumbres asociadas al WMR son acotadas por un valor cte positivo,  $|\delta_i(t)| \leq \bar{\delta}_i \quad i = x, y, v, \omega$ .

### 3.3. Diseño del controlador cinemático.

El objetivo de esta sección es encontrar la ley de control cinemático basado en la parte de la cinemática expresada en tiempo discreto del robot.

Considerando la cinemática reducida del robot.

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\psi(t)) & -a\sin(\psi(t)) \\ \sin(\psi(t)) & a\cos(\psi(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_x(t) \\ \delta_y(t) \end{pmatrix} \quad (3-4)$$

Considerando (3-4) y basándose en la cinemática inversa, la ley de control se expresa como sigue:

$$\begin{pmatrix} v_{ref}(t) \\ \omega_{ref}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\psi(t)) & \sin(\psi(t)) \\ -\frac{1}{a}\sin(\psi(t)) & \frac{1}{a}\cos(\psi(t)) \end{pmatrix} \times \dots \quad (3-5)$$

$$\times \begin{pmatrix} \dot{x}_{ref}(t) + b_x \tanh\left(\frac{k_x}{b_x} \tilde{x}(t)\right) \\ \dot{y}_{ref}(t) + b_y \tanh\left(\frac{k_y}{b_y} \tilde{y}(t)\right) \end{pmatrix}$$

Donde  $x_{ref}(t)$ ,  $y_{ref}(t)$ , son las coordenadas de la posición de referencia,  $\tilde{x}(t)$ ,  $\tilde{y}(t)$  son el error de trayectoria,  $b_x$ ,  $b_y$ , y  $k_x$ ,  $k_y$  son las ganancias de ajuste de la función  $\tanh(\cdot)$

Definiendo el vector de error de salida  $\tilde{\mathbf{y}} = (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))^T$ , y expresando la ec.(3-5) en forma compacta.

$$\mathbf{x}_{ref}(t) = \mathbf{Y}^{-1} \cdot (\dot{\mathbf{y}}_{ref}(t) + \varsigma(\tilde{\mathbf{y}})) \quad (3-6)$$

donde

$$\mathbf{x}_{ref}(t) = \begin{pmatrix} v_{ref}(t) \\ \omega_{ref}(t) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{ref}(t) = \begin{pmatrix} v_{ref}(t) \\ \omega_{ref}(t) \end{pmatrix}; \dot{\mathbf{y}}_{ref}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_{ref}(t) \\ \dot{y}_{ref}(t) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Y}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\psi(t)) & \sin(\psi(t)) \\ -\frac{1}{a}\sin(\psi(t)) & \frac{1}{a}\cos(\psi(t)) \end{pmatrix}; \varsigma(\tilde{\mathbf{y}}) = \begin{pmatrix} b_x \tanh\left(\frac{k_x}{b_x} \tilde{x}(t)\right) \\ b_y \tanh\left(\frac{k_y}{b_y} \tilde{y}(t)\right) \end{pmatrix} \quad (3-7)$$

Reemplazando la ec.(3-5) en la ec. (3-4) bajo el supuesto de un seguimiento perfecto de la velocidad, la ecuación de lazo cerrado es,

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}}(t) \\ \dot{\tilde{y}}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x & 0 \\ 0 & b_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tanh\left(\frac{k_x}{b_x} \tilde{x}(t)\right) \\ \tanh\left(\frac{k_y}{b_y} \tilde{y}(t)\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3-8)$$

La ecuación (3-8) puede ser reescrita como:

$$\tilde{\mathbf{y}}(t) = \zeta(\tilde{\mathbf{y}}) = - \begin{pmatrix} b_x \tanh\left(\frac{k_x}{b_x} \tilde{x}(t)\right) \\ b_y \tanh\left(\frac{k_y}{b_y} \tilde{y}(t)\right) \end{pmatrix} \quad (3-9)$$

El análisis de estabilidad se mostrará en la sección 3.6

### 3.4. Formulación del problema:

Debido a las incertidumbres y variaciones de los parámetros en la dinámica del robot, es necesario diseñar un controlador con propiedades adaptativas. Este controlador debe implementarse utilizando técnicas neuronales en combinación con la teoría SMC (controlador NA-SMC). El controlador de la dinámica se alimenta con las velocidades lineales y angulares proporcionadas por el controlador de la cinemática, anotadas por  $\mathbf{y}_{ref}(t) = [x_{ref}(t), y_{ref}(t)]^T$ . El controlador NA-SMC envía otro conjunto de velocidades lineales y angulares de salida para alimentar los actuadores del robot  $\mathbf{x}_{ref}(t) = [v_{ref}(t), \omega_{ref}(t)]^T$ , como se muestra en la figura 3-2.

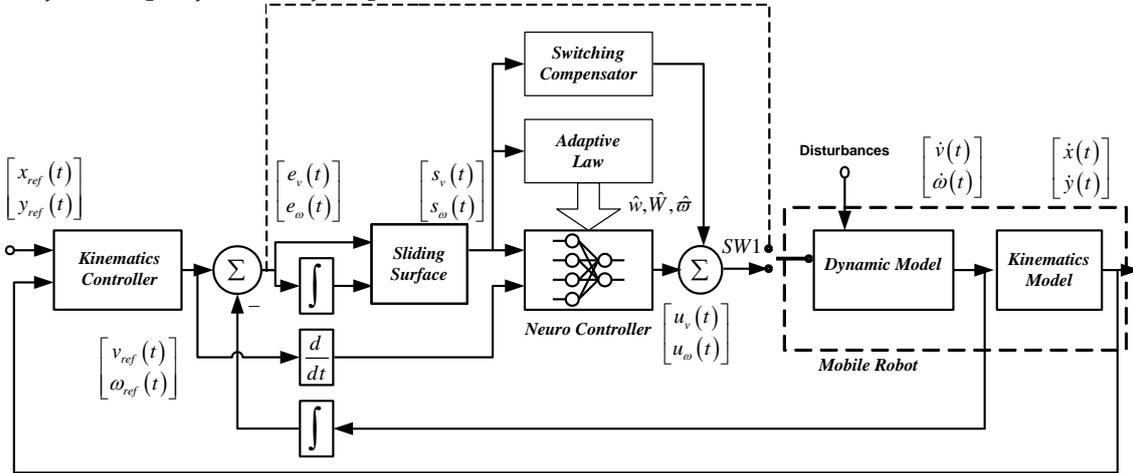


figura 3-2: Estructura de control basado en Neuro Adaptable- SMC en Tiempo discreto

El sistema dinámico (3-2), puede expresarse en forma compacta como:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{g}\mathbf{u}(k) + \boldsymbol{\delta}(t) = \dots \\ &= \begin{pmatrix} f_v(\mathbf{x}(t)) \\ f_\omega(\mathbf{x}(t)) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_v & 0 \\ 0 & g_\omega \end{pmatrix} \mathbf{u}(t) + \begin{pmatrix} \delta_v(t) \\ \delta_\omega(t) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3-10)$$

Teniendo en cuenta que  $\mathbf{g}$  es una matriz diagonal, para que (3-5) sea controlable, las componentes diagonales deben ser diferentes a cero ( $g_i \neq 0$ ). El vector  $\boldsymbol{\delta}(t)$  representa las incertidumbres (depende del par  $\delta_v(t)$ ,  $\delta_\omega(t)$ ). Las variables de estado vector de entrada y vector de parámetros de incertidumbre se definen como  $\mathbf{x}(t) = [v(t), \omega(t)]^T$  y  $\boldsymbol{\delta}(t) = [\delta_v(t), \delta_\omega(t)]^T$ , respectivamente. El error de control de seguimiento se anota como sigue:

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_{ref}(t) = \begin{pmatrix} v(t) - v_{ref}(t) \\ \omega(t) - \omega_{ref}(t) \end{pmatrix} \quad (3-11)$$

donde:  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ , vector de variables de estado (velocidades de salida);  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$  vector de variables de entrada manipuladas (velocidades de referencia);  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$  que representa la dinámica del robot;  $\mathbf{g}$  es la matriz de entrada a  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ ;

**Consideración 2:** Las trayectorias deseadas  $x_{ref}, y_{ref}$  y sus derivadas temporales hasta el enésimo orden, son continuas y acotadas.

**Consideración 3:** Las señales de entrada  $v_{ref}, \omega_{ref}$ , son continuas y acotadas.

### 3.5. Diseño del controlador SMC

En esta subsección, el objetivo es diseñar un controlador neuro-adaptativo que garantice el seguimiento de la velocidad de referencia de referencia  $\mathbf{x}_{ref}(t)$  manteniendo todas las variables acotadas dentro el lazo de control. Este controlador debe ser implementado en un robot móvil utilizando la técnica de linealización de retroalimentación neural y puede minimizar el vector de error de velocidad [60], [57].

El vector de velocidad deseado  $\mathbf{x}_{ref}(t)$  proporcionado por el control cinemático se introduce en el controlador dinámico como señal de referencia, y la ley de control diseñada debe reducir el error entre el vector de velocidad  $\mathbf{x}(t)$  y el vector de velocidad deseado  $\mathbf{x}_{ref}(t)$ . Por lo tanto, el error de seguimiento debe converger a cero.

Para diseñar una superficie de deslizamiento  $S(\mathbf{x})$  para un sistema robótico móvil, debe considerarse el estado de error  $\mathbf{e}(t)$ :

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} + \lambda_v & 0 \\ 0 & \frac{d}{dt} + \lambda_\omega \end{pmatrix} \int_0^t \mathbf{e}(\tau) d\tau = \begin{pmatrix} e_v(t) + \lambda_v \int_0^t e_v(\tau) d\tau \\ e_\omega(t) + \lambda_\omega \int_0^t e_\omega(\tau) d\tau \end{pmatrix} \quad (3-12)$$

La derivada de la superficie deslizante  $S(\mathbf{x})$  se expresa como:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{S}}(\mathbf{x}) &= \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} e_v(t) + \lambda_v \int_0^t e_v(\tau) d\tau \\ e_\omega(t) + \lambda_\omega \int_0^t e_\omega(\tau) d\tau \end{pmatrix} = \dots \\ &= \begin{pmatrix} \dot{e}_v(t) + \lambda_v e_v(t) \\ \dot{e}_\omega(t) + \lambda_\omega e_\omega(t) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3-13)$$

Donde  $\lambda_{v\omega}$  es una constante estrictamente positiva. Entonces el problema de control equivalente es construir  $\mathbf{u}(t)$  tal que:

- $\mathbf{S}(\mathbf{x})$  se alcanza en un tiempo finito  $t_s$
- $\mathbf{S}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  para todo  $t > t_s$ .

La solución para el problema equivalente es elegir una acción de control que:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (S_i^2) \leq \Gamma_i |S_i| \quad \forall t \geq 0, \Gamma_i > 0, i = v, \omega \quad (3-14)$$

Donde  $S_i$  es una fila de la matriz  $\mathbf{S}$  o

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\mathbf{S}^T \mathbf{S}) &\leq \Gamma_{max} \|\mathbf{S}\| \quad \forall t \geq 0, \Gamma_{max} > 0 \\ \Gamma_{max} &= \max(\Gamma_v, \Gamma_\omega) \end{aligned} \quad (3-15)$$

En el diseño del sistema de control en modo deslizante, primero, la ley de control equivalente ideal  $\mathbf{u}^*$ , que determina la dinámica del sistema en la superficie de deslizamiento. La ley de control equivalente ideal se obtiene reconociendo

$$\dot{\mathbf{S}}(\mathbf{x})|_{\mathbf{u}(t)=\mathbf{u}^*(t)} = 0 \quad (3-16)$$

Sustituyendo la ec. (3-13) en la ec. (3-16), se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{\mathbf{e}}(t) + \text{diag}(\lambda_v, \lambda_\omega) \mathbf{e}(t) = \dots \\ &= \left( \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{g}\mathbf{u}^*(t) + \boldsymbol{\delta}(t) - \dot{\mathbf{x}}_{ref}(t) \right) + \text{diag}(\lambda_v, \lambda_\omega) \mathbf{e}(t) \end{aligned} \quad (3-17)$$

Ahora, el problema de controlar un sistema no lineal incierto (3-10) tratado en Slotine y Li [53], es definir una ley de control  $\mathbf{u}^*(t)$  que garantice la condición de deslizamiento de la ec. (3-17), se compone de un control equivalente control  $\mathbf{u} = \mathbf{g}^{-1} \left( -\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) - \text{diag}(\lambda_v, \lambda_\omega) \mathbf{e}(t) - \boldsymbol{\delta}(t) + \dot{\mathbf{x}}_{ref}(t) \right)$  y un término discontinuo  $\mathbf{u}_s(t) = -\boldsymbol{\Gamma} \text{sign}(\mathbf{S})$  definido por:

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{g}^{-1} \left( -\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) - \text{diag}(\lambda_v, \lambda_\omega) \mathbf{e}(t) - \boldsymbol{\Gamma} \text{sign}(\mathbf{S}) + \dot{\mathbf{x}}_{ref}(t) \right) \quad (3-18)$$

Donde:

$$\text{sign}(S_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } S_i > 0 \\ 0 & \text{si } S_i = 0 \\ -1 & \text{si } S_i < 0 \end{cases} \quad (3-19)$$

Definimos la función candidata de Lyapunov de la forma:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=v}^{\omega} S_i^2 \quad (3-20)$$

Derivando la ecuación anterior en función del tiempo queda:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{2} \sum_{i=v}^{\omega} S_i \dot{S}_i = \frac{1}{2} \sum_{i=v}^{\omega} S_i (\dot{e}_i(t) + \lambda_i e_i(t)) = \dots \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=v}^{\omega} S_i (\dot{x}_i(t) - \dot{x}_{iref}(t) + \lambda_i e_i(t)) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=v}^{\omega} S_i (f_i(\mathbf{x}(t)) + g_i \mathbf{u}(k) + \delta_i(t) - \dot{x}_{iref}(t) + \lambda_i e_i(t)) \end{aligned} \quad (3-21)$$

Reemplazando la (3-18) en (3-21).

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \sum_{i=v}^{\omega} S_i \dot{S}_i = \frac{1}{2} \sum_{i=v}^{\omega} S_i (-\Gamma_i \text{sign}(S_i)) = \frac{1}{2} \sum_{i=v}^{\omega} -\Gamma_i \text{sign}|S_i| \quad (3-22)$$

Entonces, dividiendo cada término de la (3-22) por  $|S_i|$  e integrando ambos lados sobre el intervalo  $0 < t < t_s$ , donde  $t_s$  es el tiempo necesario para llegar a  $\mathbf{S}$ , se obtiene

$$\int_0^{t_s} \frac{S_i}{|S_i|} \dot{S}_i dt \leq \int_0^{t_s} \Gamma_i dt \Rightarrow |S_i(t_s)| - |S_i(0)| \leq -\Gamma_i t_s \quad (3-23)$$

De este modo, observando que  $S_i(t_s) = 0$ , se tiene

$$t_s \leq \frac{|S_i(0)|}{\Gamma_i} \quad (3-24)$$

Y en consecuencia, la convergencia en tiempo finito a superficie de deslizamiento  $\mathbf{S}$

### 3.6. Sistema neuronal adaptativo y leyes de ajuste en tiempo discreto

En los sistemas reales,  $f(x(t))$ ,  $g$  y  $\delta(t)$  representan la parte dinámica del sistema y  $\Gamma$  es un parámetro de control definido por el diseñador. La parte dinámica puede ser parcialmente conocida o desconocida y  $sign(S(t))$  no es una función continua. Entonces se propone emplear un sistema neuronal para aproximar  $f(x(t))$ ,  $g$  y  $\delta(t)$  mediante las estimaciones  $\hat{f}(x(t), \hat{w})$ ,  $\hat{g}(\hat{W})$  y  $\hat{\delta}(k, \hat{\omega})$ , respectivamente, en **Error! No se encuentra el origen de la referencia.** Los vectores de pesos óptimos son definidos como:  $w^* = \operatorname{argmin}_{w \in \Omega_w} \{ \sup_{x \in \Omega_x} |f(x(t)) - \hat{f}(x(t), w)| \}$ ,  $W^* = \operatorname{argmin}_{W \in \Omega_W} \{ \sup_{x \in \Omega_x} |g - \hat{g}(W)| \}$  y  $\omega^* = \operatorname{argmin}_{\omega \in \Omega_\omega} \{ \sup_{x \in \Omega_x} |\delta(t) - \hat{\delta}(t, \omega)| \}$  donde  $\Omega_W$  y  $\Omega_x$  son conjuntos compactos de límites adecuados sobre  $w$ ,  $W$  y  $\omega$  y  $v$ , respectivamente, definidos como  $\Omega_W = \{w / |w| \leq \zeta_w \wedge |w| \leq \zeta_w \wedge |\omega| \leq \zeta_\omega\}$  y  $\Omega_x = \{xv / |xv| \leq \zeta_{xv}\}$  donde  $\zeta_w$ ,  $\zeta_W$ ,  $\zeta_\omega$  y  $\zeta_x$  son constantes positivas.

**Radial Basis Functions**

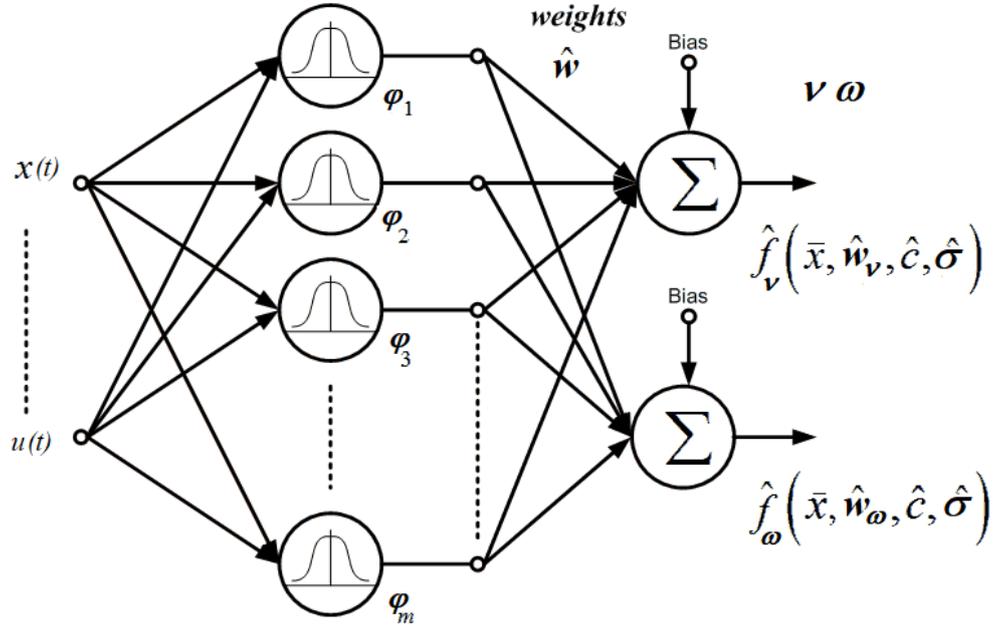


figura 3-3: Red de Base Radial para aproximar la función f(.)

En la red neuro-adaptativa, la capa oculta se implementada con funciones de activación exponencial, y cada función se llama RBF, que se expresa como siguiente:

$$\varphi_j(\bar{x}) = \exp \left[ -\frac{1}{\sigma_j^2} (\bar{x} - c_j)^T (\bar{x} - c_j) \right] \quad (3-25)$$

donde  $j$  indica el  $j$  – esimo componente de la capa oculta,  $c_j$  es la posición del centroide del  $j$  – esimo componente neuronal y  $\sigma_j$  es su factor de apertura. Los patrones de entrada neuronal son organizados como  $\bar{x} = [x(t), \dot{x}(t), x_{ref}(t), u(k)]^T$  El control  $u$  puede estar compuesto por una NN-RBF mediante el aprendizaje en línea

$$u^* = (g(W^*))^{-1} (-AS(t) - f(x(t), w^*) - \operatorname{diag}(\lambda_v, \lambda_\omega) e(t) - \delta(t, \omega^*) + \dots + \dot{x}_{ref}(t) - \Gamma \operatorname{sign}(S(t))) \quad (3-26)$$

Donde  $\mathbf{w}^* \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{W}^* \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $\boldsymbol{\varpi}^* \in \mathbb{R}^{m \times n}$  son vectores de pesos óptimos de  $\mathbf{w}$ ,  $\mathbf{W}$  y  $\boldsymbol{\varpi}$  pesos asociados a las funciones  $(\mathbf{x}(t))$ ,  $\mathbf{g}$  y  $\boldsymbol{\delta}(t)$  respectivamente. El vector de funciones  $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$  y  $\boldsymbol{\chi} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$  son las bases radiales vinculadas a los pesos  $\mathbf{w}$  y  $\boldsymbol{\varpi}$ , respectivamente.

Sin embargo, los vectores óptimos de los parámetros son desconocidos; por lo que es necesario estimar sus valores. Definamos definir una función de control con valores de pesos estimados:

$$\mathbf{u} = \left( \hat{\mathbf{g}}(\widehat{\mathbf{W}}) \right)^{-1} \left( -\mathbf{A}\mathbf{S}(t) - \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}(t), \widehat{\mathbf{w}}) - \text{diag}(\lambda_v, \lambda_\omega) \mathbf{e}(t) - \hat{\boldsymbol{\delta}}(t, \widehat{\boldsymbol{\varpi}}) + \dots \right. \\ \left. + \dot{\mathbf{x}}_{ref}(t) - \boldsymbol{\Gamma} \text{sign}(\mathbf{S}(t)) \right) \quad (3-27)$$

Las variables  $\mathbf{w}$ ,  $\mathbf{W}$  y  $\boldsymbol{\varpi}$  son los pesos neuronales utilizados por el sistema neuro-adaptativo  $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}(t), \widehat{\mathbf{w}})$ ,  $\hat{\mathbf{g}}(\widehat{\mathbf{W}})$  y  $\hat{\boldsymbol{\delta}}(t, \widehat{\boldsymbol{\varpi}})$  respectivamente, y pueden expresarse como sigue:

$$\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}(t), \widehat{\mathbf{w}}) = \widehat{\mathbf{w}}^T \boldsymbol{\varphi}(\bar{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{w}}_1^T \boldsymbol{\varphi}(\bar{\mathbf{x}}) \\ \widehat{\mathbf{w}}_2^T \boldsymbol{\varphi}(\bar{\mathbf{x}}) \end{pmatrix} \quad (3-28)$$

y

$$\hat{\mathbf{g}}(\widehat{\mathbf{W}}) = \widehat{\mathbf{W}}^T \quad (3-29)$$

donde  $\widehat{\mathbf{w}}_{v,\omega}^T \in \mathbb{R}^{1 \times m}$  son vectores fila con  $m = 5$  y  $\widehat{\mathbf{W}}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  siendo  $n = 2$ . Se emplea un término de control PI para atenuar las perturbaciones externas. El término de control MIMO PI está expresado en la forma de:

$$\hat{\boldsymbol{\delta}}(t, \widehat{\boldsymbol{\varpi}}) = \begin{pmatrix} (k_{Pv} \quad k_{Iv}) \begin{pmatrix} S_v(t) \\ \int_0^t S_v(\tau) d\tau \end{pmatrix} \\ (k_{P\omega} \quad k_{I\omega}) \begin{pmatrix} S_\omega(t) \\ \int_0^t S_\omega(\tau) d\tau \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{Pv} S_v(t) + k_{Iv} \int_0^t S_v(\tau) d\tau \\ k_{P\omega} S_\omega(t) + k_{I\omega} \int_0^t S_\omega(\tau) d\tau \end{pmatrix} = \quad (3-30) \\ = \begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{\varpi}}_v^T \boldsymbol{\chi}(S_v) \\ \widehat{\boldsymbol{\varpi}}_\omega^T \boldsymbol{\chi}(S_\omega) \end{pmatrix} = \widehat{\boldsymbol{\varpi}}^T \boldsymbol{\chi}(\bar{\mathbf{S}})$$

donde  $\widehat{\boldsymbol{\varpi}}_v^T = (k_{Pv} \quad k_{Iv})$  y  $\widehat{\boldsymbol{\varpi}}_\omega^T = (k_{P\omega} \quad k_{I\omega})$  son ganancias ajustables, y  $\boldsymbol{\chi}(S_v) = (S_v(t) \quad \int_0^t S_v(\tau) d\tau)$  y  $\boldsymbol{\chi}(S_\omega) = (S_\omega(t) \quad \int_0^t S_\omega(\tau) d\tau)$  dependen del vector regresor. Esta técnica de control se basa en (3-27), y el mínimo error de aproximación puede definirse como sigue:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left( \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) - \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{w}^*) \right) + \left( \mathbf{g} - \mathbf{g}(\mathbf{W}^*) \right) \mathbf{u} + \left( \boldsymbol{\delta}(t) - \boldsymbol{\delta}(t, \boldsymbol{\varpi}^*) \right) \quad (3-31)$$

Ahora, utilizando la ec. (3-13) y considerando el modelo dinámico del robot (3-10) se puede escribir como

$$\dot{\mathbf{S}}(t) = \dot{\mathbf{e}}(t) + \text{diag}(\lambda_v, \lambda_\omega) \mathbf{e}(t) = \dots \\ = \left( \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{g} \mathbf{u}(t) + \boldsymbol{\delta}(t) - \dot{\mathbf{x}}_{ref}(t) \right) + \text{diag}(\lambda_v, \lambda_\omega) \mathbf{e}(t) \quad (3-32)$$

Sustituyendo la acción de control propuesta en (3-27) en (3-32):

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{S}}(k) &= \dot{\mathbf{e}}(t) + \text{diag}(\lambda_v, \lambda_\omega) \mathbf{e}(t) = \dots \\
&= \left( \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) - \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}(t), \hat{\mathbf{w}}) + \left( \mathbf{g} - \hat{\mathbf{g}}(\hat{\mathbf{W}}) \right) \mathbf{u}(t) + \left( \boldsymbol{\delta}(t) - \hat{\boldsymbol{\delta}}(t, \hat{\boldsymbol{\omega}}) \right) \right) + \dots \\
&\quad - \mathbf{A}\mathbf{S}(t) - \Gamma \text{sign}(\mathbf{S}(t)) = \dots \\
&= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{w}^*) - \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}(t), \hat{\mathbf{w}}) + \dots \\
&\quad + \left( \left( \mathbf{g}(\mathbf{W}^*) - \hat{\mathbf{g}}(\hat{\mathbf{W}}) \right) \mathbf{u}(t) + \left( \boldsymbol{\delta}(t, \boldsymbol{\omega}^*) - \hat{\boldsymbol{\delta}}(t, \hat{\boldsymbol{\omega}}) \right) \right) + \dots \\
&\quad + \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{A}\mathbf{S}(t) - \Gamma \text{sign}(\mathbf{S}(t))
\end{aligned} \tag{3-33}$$

Ahora considerando que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{w}^*) - \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}(t), \hat{\mathbf{w}}) &= \mathbf{w}^{*T} \boldsymbol{\varphi}^*(\bar{\mathbf{x}}) - \hat{\mathbf{w}}^T \hat{\boldsymbol{\varphi}}(\bar{\mathbf{x}}) = \dots \\
&= (\tilde{\mathbf{w}} + \hat{\mathbf{w}})^T (\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\bar{\mathbf{x}}) + \hat{\boldsymbol{\varphi}}(\bar{\mathbf{x}})) - \hat{\mathbf{w}}^T \hat{\boldsymbol{\varphi}}(\bar{\mathbf{x}}) = \dots
\end{aligned} \tag{3-34}$$

$$\begin{aligned}
&= \tilde{\mathbf{w}}^T \hat{\boldsymbol{\varphi}}(\bar{\mathbf{x}}) + \hat{\mathbf{w}}^T \tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\bar{\mathbf{x}}) + \tilde{\mathbf{w}}^T \tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\bar{\mathbf{x}}) \\
\mathbf{g}(\mathbf{W}^*) - \hat{\mathbf{g}}(\hat{\mathbf{W}}) &= \mathbf{W}^{*T} - \hat{\mathbf{W}}^T = \tilde{\mathbf{W}}^T
\end{aligned} \tag{3-35}$$

$$\boldsymbol{\delta}(t, \boldsymbol{\omega}^*) - \hat{\boldsymbol{\delta}}(t, \hat{\boldsymbol{\omega}}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega}_v^{*T} \boldsymbol{\chi}(S_v) \\ \boldsymbol{\omega}_\omega^{*T} \boldsymbol{\chi}(S_\omega) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\omega}}_v^T \boldsymbol{\chi}(S_v) \\ \hat{\boldsymbol{\omega}}_\omega^T \boldsymbol{\chi}(S_\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_v^T \boldsymbol{\chi}(S_v) \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}}_\omega^T \boldsymbol{\chi}(S_\omega) \end{pmatrix} \tag{3-36}$$

De la ecuación anterior se puede ver que:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{w}} &= \mathbf{w}^* - \hat{\mathbf{w}} \\
\tilde{\mathbf{W}} &= \mathbf{W}^* - \hat{\mathbf{W}} \\
\tilde{\boldsymbol{\omega}}_v &= \boldsymbol{\omega}_v^* - \hat{\boldsymbol{\omega}}_v \\
\tilde{\boldsymbol{\omega}}_\omega &= \boldsymbol{\omega}_\omega^* - \hat{\boldsymbol{\omega}}_\omega \\
\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\bar{\mathbf{x}}) &= \hat{\boldsymbol{\varphi}}(\bar{\mathbf{x}}) - \boldsymbol{\varphi}^*(\bar{\mathbf{x}})
\end{aligned} \tag{3-37}$$

siendo  $\mathbf{w}^*$ ,  $\mathbf{W}^*$  y  $\boldsymbol{\omega}^*$  los parámetros óptimos de peso neuronal y ganancias. A partir de (3-33) y teniendo en cuenta (3-34)(3-27)-(3-36) se llega a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{S}}(t) &= -\mathbf{A}\mathbf{S}(t) + \left( \tilde{\mathbf{w}}^T \hat{\boldsymbol{\varphi}}(\bar{\mathbf{x}}) + \hat{\mathbf{w}}^T \tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\bar{\mathbf{x}}) + \tilde{\mathbf{w}}^T \tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\bar{\mathbf{x}}) \right) + \tilde{\mathbf{W}}^T \mathbf{u}(t) + \dots \\
&\quad + \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_v^T \boldsymbol{\chi}(S_v) \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}}_\omega^T \boldsymbol{\chi}(S_\omega) \end{pmatrix} + \boldsymbol{\varepsilon} - \Gamma \text{sign}(\mathbf{S}(t))
\end{aligned} \tag{3-38}$$

utilizando una aproximación para la función  $\tilde{\varphi}_j(\bar{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{c}}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}) = \varphi_j^*(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{c}^*, \sigma^*) - \hat{\varphi}_j(\bar{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{c}}, \hat{\boldsymbol{\sigma}})$ . Para aproximar  $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\cdot)$ , se utiliza la expansión de Taylor de  $\boldsymbol{\varphi}^*(\cdot)$  Considerada en el entorno de  $\mathbf{c}^* = \hat{\mathbf{c}}$  y  $\sigma^* = \hat{\boldsymbol{\sigma}}$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varphi}^*(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{c}^*, \sigma^*) &= \hat{\boldsymbol{\varphi}}(\bar{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{c}}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}) + \Delta\boldsymbol{\varphi}_c^T (\mathbf{c}^* - \hat{\mathbf{c}}) + \Delta\boldsymbol{\varphi}_\sigma^T (\sigma^* - \hat{\boldsymbol{\sigma}}) + \mathbf{O}(\bar{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{c}}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}) = \dots \\
&= \hat{\boldsymbol{\varphi}}(\bar{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{c}}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}) + \Delta\boldsymbol{\varphi}_c^T \tilde{\mathbf{c}} + \Delta\boldsymbol{\varphi}_\sigma^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{O}(\bar{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{c}}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}})
\end{aligned} \tag{3-39}$$

Donde  $O(\cdot)$  denota los elementos de alto orden en una expansión en serie de Taylor y  $\Delta\boldsymbol{\varphi}_c^T$  y  $\Delta\boldsymbol{\varphi}_\sigma^T$  son las derivadas parciales de  $\varphi_j^*(\mathbf{x}, \mathbf{c}^*, \sigma^*)$  con respecto a  $(\mathbf{c}^*, \sigma^*)$  en  $(\hat{\mathbf{c}}, \hat{\boldsymbol{\sigma}})$ . Se expresan como:

$$\begin{aligned}
\Delta\boldsymbol{\varphi}_c^T &= \left. \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}^*(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{c}^*, \sigma^*)}{\partial \mathbf{c}^*} \right|_{\substack{\mathbf{c}^* = \hat{\mathbf{c}} \\ \sigma^* = \hat{\boldsymbol{\sigma}}}} \\
\Delta\boldsymbol{\varphi}_\sigma^T &= \left. \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}^*(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{c}^*, \sigma^*)}{\partial \sigma^*} \right|_{\substack{\mathbf{c}^* = \hat{\mathbf{c}} \\ \sigma^* = \hat{\boldsymbol{\sigma}}}}
\end{aligned} \tag{3-40}$$

La ecuación (3-39) puede expresarse como

$$\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\bar{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{c}}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}) = \Delta\boldsymbol{\varphi}_c^T \tilde{\mathbf{c}} + \Delta\boldsymbol{\varphi}_\sigma^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{O}(\bar{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{c}}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}) \tag{3-41}$$

A partir de (3-41) el término de alto orden  $O(\cdot)$  se puede demostrar que se encuentra acotado por

$$\begin{aligned}\|\mathbf{O}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{c}}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}})\| &= \|\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{c}}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}) - \Delta\boldsymbol{\varphi}_{\tilde{\mathbf{c}}}^T\tilde{\mathbf{c}} - \Delta\boldsymbol{\varphi}_{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}^T\tilde{\boldsymbol{\sigma}}\| \leq \dots \\ &\leq \|\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{c}}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}})\| - \|\Delta\boldsymbol{\varphi}_{\tilde{\mathbf{c}}}^T\tilde{\mathbf{c}}\| - \|\Delta\boldsymbol{\varphi}_{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}^T\tilde{\boldsymbol{\sigma}}\| = \dots \\ &= \kappa_1 - \kappa_2\|\tilde{\mathbf{c}}\| - \kappa_3\|\tilde{\boldsymbol{\sigma}}\| \leq O_{Max}\end{aligned}\quad (3-42)$$

donde  $\kappa_1, \kappa_2$  y  $\kappa_3$  son valores constantes debido al hecho de que la función gaussiana de la RBF y su derivada siempre están limitadas por constantes.

Sustituyendo la Ec. (3-41) en la Ec. (3-38)

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{S}}(t) &= -\mathbf{A}\mathbf{S}(t) + (\tilde{\mathbf{w}}^T\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\bar{\mathbf{x}}) + \hat{\mathbf{w}}^T\Delta\boldsymbol{\varphi}_{\tilde{\mathbf{c}}}^T\tilde{\mathbf{c}} + \hat{\mathbf{w}}^T\Delta\boldsymbol{\varphi}_{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}^T\tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\Delta}) + \tilde{\mathbf{W}}^T\mathbf{u}(t) + \dots \\ &\quad + \left(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_v^T\boldsymbol{\chi}(S_v)\right) + \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\Gamma}\text{sign}(\mathbf{S}(t))\end{aligned}\quad (3-43)$$

Observación 1 Donde la incertidumbre  $\boldsymbol{\Delta} = \hat{\mathbf{w}}^T\mathbf{O}(\bar{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{c}}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}) + \tilde{\mathbf{w}}^T\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\bar{\mathbf{x}})$  se supone acotada por  $\|\boldsymbol{\Delta}\| \leq \Delta_{max}$

**Teorema 3-1** Consideremos el sistema no lineal incierto (3-10) y usando el controlador definido por las ecs. (3-27) y (3-28)-(3-29) asegura la convergencia en tiempo finito del vector error de control.

**Demostración:** Para demostrar la convergencia de la técnica de control propuesta es necesario definir una función positiva-definida (función candidata de Lyapunov)  $V$  como

$$\begin{aligned}V &= V_1 + V_2 = \frac{1}{2}\sum_{i=x}^y (\tilde{y}_i)^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=v}^{\omega} (S_{\Lambda i}^2(t) + 2\gamma_1^{-1}\tilde{\mathbf{w}}_i^T(t)\tilde{\mathbf{w}}_i(t) + \dots \\ &\quad + 2\gamma_2^{-1}\tilde{\mathbf{W}}_i^T(t)\tilde{\mathbf{W}}_i(t) + 2\gamma_3^{-1}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i^T(t)\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i(t)) + \gamma_4^{-1}(\tilde{\mathbf{c}}^T\tilde{\mathbf{c}}) + \gamma_5^{-1}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^T\tilde{\boldsymbol{\sigma}})\end{aligned}\quad (3-44)$$

Ahora, la diferencia discreta  $\dot{V}$  puede representarse como sigue a continuación:

Donde  $S_{\Lambda}$  es una medida de la distancia del estado actual a la capa límite, y puede ser calculado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}S_{\Lambda i} &= S_i - \text{sat}\left(\frac{S_i}{\Lambda_i}\right) \\ \text{sat}\left(\frac{S_i}{\Lambda_i}\right) &= \begin{cases} \text{sign}(S_i) \text{ si } |S_i| \geq \Lambda_i \\ (S_i/\Lambda_i) \text{ si } |S_i| < \Lambda_i \end{cases}\end{aligned}\quad (3-45)$$

La presencia de un término discontinuo en la ley de control conduce al conocido efecto de parloteo. Para evitar estas indeseables oscilaciones de alta frecuencia de la variable controlada, la función de signo puede ser sustituida por una función de saturación, similar a la realizada por Hung y Chung [54]. Esta sustitución suaviza la discontinuidad del control e introduce una fina capa límite  $S$ , en la vecindad de la superficie de conmutación.

$$S_{\Lambda i} = \{e_i \in \mathbb{R} / S_i(e_i) \leq |\Lambda_i|\} \quad (3-46)$$

Donde  $\Lambda_i$  es una constante estrictamente positiva que representa el espesor de la capa límite.

Ahora, diferenciar la ec. (3-44) con respecto al tiempo y observando que  $S_{\Lambda i} = 0$  dentro de la capa límite y  $\dot{S}_{\Lambda i} = \dot{S}_i$ . Obteniendo  $V_2 = 0$ , dentro de  $S_i$  y fuera es

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \sum_{i=x}^y \tilde{y}_i\dot{\tilde{y}}_i + \sum_{i=v}^{\omega} (S_{\Lambda i}\dot{S}_i + \gamma_1^{-1}\tilde{\mathbf{w}}_i^T(t)\dot{\tilde{\mathbf{w}}}_i(t) + \dots \\ &\quad + \gamma_2^{-1}\tilde{\mathbf{W}}_i^T(t)\dot{\tilde{\mathbf{W}}}_i(t) + \gamma_3^{-1}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i^T(t)\dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}_i(t)) + \gamma_4^{-1}(\tilde{\mathbf{c}}^T\dot{\tilde{\mathbf{c}}}) + \gamma_5^{-1}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^T\dot{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}})\end{aligned}\quad (3-47)$$

Donde  $V_1$  puede ser expresado como:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = \sum_{i=x}^y \tilde{y}_i \dot{\tilde{y}}_i = \tilde{\mathbf{y}}^T \dot{\tilde{\mathbf{y}}} = -\tilde{x}(t) b_x \tanh\left(\frac{k_x}{b_x} \tilde{x}(t)\right) - \dots \\ - \tilde{y}(t) b_y \tanh\left(\frac{k_y}{b_y} \tilde{y}(t)\right) \leq 0 \end{aligned} \quad (3-48)$$

Para pequeños valores del error

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = -\tilde{x}(t) b_x \tanh\left(\frac{k_x}{b_x} \tilde{x}(t)\right) - \tilde{y}(t) b_y \tanh\left(\frac{k_y}{b_y} \tilde{y}(t)\right) \cong \dots \\ \cong -k_x (\tilde{x}(t))^2 - k_y (\tilde{y}(t))^2 \leq 0 \end{aligned} \quad (3-49)$$

Lo que implica que  $\tilde{\mathbf{y}}(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Analizando  $V_2$  y reemplazando la ec.(3-43)

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = \sum_{i=v}^{\omega} S_{\Lambda i} [-a_i S_{\Lambda i}(t) + (\tilde{\mathbf{w}}_i^T \hat{\boldsymbol{\varphi}}(\bar{\mathbf{x}}) + \hat{\mathbf{w}}_i^T \Delta \boldsymbol{\varphi}_c^T \tilde{\mathbf{c}} + \hat{\mathbf{w}}_i^T \Delta \boldsymbol{\varphi}_\sigma^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \Delta_i) + \dots \\ + \bar{\mathbf{W}}_i^T \mathbf{u}(t) + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i^T \boldsymbol{\chi}(S_i) + \varepsilon_i - \Gamma_i \text{sign}(S_{\Lambda i}(t)) + \dots \\ + \gamma_1^{-1} \tilde{\mathbf{w}}_i^T(t) \dot{\tilde{\mathbf{w}}}_i(t) + \gamma_2^{-1} \bar{\mathbf{W}}_i^T(t) \dot{\bar{\mathbf{W}}}_i(t) + \dots \\ + \gamma_3^{-1} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i^T(t) \dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}_i(t) + \gamma_4^{-1} (\tilde{\mathbf{c}}^T \dot{\tilde{\mathbf{c}}}) + \gamma_5^{-1} (\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^T \dot{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}) \end{aligned} \quad (3-50)$$

Si definimos  $\Gamma_i = \varepsilon_{max} + \Delta_{max}$  y reordenando la ec.(3-50)

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = \sum_{i=v}^{\omega} [-a_i(t) S_{\Lambda i}^2 + S_{\Lambda i} \tilde{\mathbf{w}}_i^T \hat{\boldsymbol{\varphi}}(\bar{\mathbf{x}}) + S_{\Lambda i} \hat{\mathbf{w}}_i^T \Delta \boldsymbol{\varphi}_c^T \tilde{\mathbf{c}} + S_{\Lambda i} \hat{\mathbf{w}}_i^T \Delta \boldsymbol{\varphi}_\sigma^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}} + S_{\Lambda i} \Delta_i + \dots \\ + S_{\Lambda i} \bar{\mathbf{W}}_i^T \mathbf{u}(t) + S_{\Lambda i} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i^T \boldsymbol{\chi}(S_i) + S_{\Lambda i} \varepsilon_i - \Gamma_i |S_{\Lambda i}| + \dots \\ + \gamma_1^{-1} \tilde{\mathbf{w}}_i^T(t) \dot{\tilde{\mathbf{w}}}_i(t) + \gamma_2^{-1} \bar{\mathbf{W}}_i^T(t) \dot{\bar{\mathbf{W}}}_i(t) + \dots \\ + \gamma_3^{-1} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i^T(t) \dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}_i(t) + \gamma_4^{-1} (\tilde{\mathbf{c}}^T \dot{\tilde{\mathbf{c}}}) + \gamma_5^{-1} (\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^T \dot{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}) \end{aligned} \quad (3-51)$$

Agrupando términos en (3-51)

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = \sum_{i=v}^{\omega} \left[ -a_i(t) S_{\Lambda i}^2 + \tilde{\mathbf{w}}_i^T \left( S_{\Lambda i} \hat{\boldsymbol{\varphi}}(\bar{\mathbf{x}}) + \gamma_1^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{w}}}_i(t) \right) + \dots \\ + \bar{\mathbf{W}}_i^T \left( S_{\Lambda i} \mathbf{u}(t) + \gamma_2^{-1} \dot{\bar{\mathbf{W}}}_i(t) \right) + \dots \\ + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i^T(t) \left( S_{\Lambda i} \boldsymbol{\chi}(S_i) + \gamma_3^{-1} \dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}_i(t) \right) + \dots \\ + S_{\Lambda i} (\varepsilon_i + \Delta_i) - \Gamma_i |S_{\Lambda i}| + \dots \\ + \sum_{i=v}^{\omega} S_{\Lambda i} \hat{\mathbf{w}}_i^T \Delta \boldsymbol{\varphi}_c^T \tilde{\mathbf{c}} + \gamma_4^{-1} (\tilde{\mathbf{c}}^T \dot{\tilde{\mathbf{c}}}) + \dots \\ + \sum_{i=v}^{\omega} S_{\Lambda i} \hat{\mathbf{w}}_i^T \Delta \boldsymbol{\varphi}_\sigma^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \gamma_5^{-1} (\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^T \dot{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}) \end{aligned} \quad (3-52)$$

Si aplicamos la propiedad de la matriz traspuesta en los últimos términos de la (3-52).

$$\begin{aligned} S_{\Lambda i} \hat{\mathbf{w}}_i^T \Delta \boldsymbol{\varphi}_c^T \tilde{\mathbf{c}} &= (S_{\Lambda i} \hat{\mathbf{w}}_i^T \Delta \boldsymbol{\varphi}_c^T \tilde{\mathbf{c}})^T = \tilde{\mathbf{c}}^T \Delta \boldsymbol{\varphi}_c \hat{\mathbf{w}}_i S_{\Lambda i} \\ S_{\Lambda i} \hat{\mathbf{w}}_i^T \Delta \boldsymbol{\varphi}_\sigma^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}} &= (S_{\Lambda i} \hat{\mathbf{w}}_i^T \Delta \boldsymbol{\varphi}_\sigma^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}})^T = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^T \Delta \boldsymbol{\varphi}_\sigma \hat{\mathbf{w}}_i S_{\Lambda i} \end{aligned} \quad (3-53)$$

Reemplazando (3-53) en (3-52) y agrupando

$$\begin{aligned}
\dot{V}_2 = & \sum_{i=v}^{\omega} \left[ -a_i(t)S_{\Lambda i}^2 + \tilde{\mathbf{w}}_i^T \left( S_{\Lambda i} \hat{\boldsymbol{\varphi}}(\bar{\mathbf{x}}) + \gamma_1^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{w}}}_i(t) \right) + \dots \right. \\
& + \tilde{\mathbf{W}}_i^T \left( S_{\Lambda i} \mathbf{u}(t) + \gamma_2^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{W}}}_i(t) \right) + \dots \\
& + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i^T(t) \left( S_{\Lambda i} \boldsymbol{\chi}(S_i) + \gamma_3^{-1} \dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}_i(t) \right) + \dots \\
& + S_{\Lambda i}(\varepsilon_i + \Delta_i) - \Gamma_i |S_{\Lambda i}| + \dots \\
& + \tilde{\mathbf{c}}^T \left( \sum_{i=v}^{\omega} \tilde{\mathbf{c}}^T \Delta \boldsymbol{\varphi}_c \hat{\mathbf{w}}_i S_{\Lambda i} + \gamma_4^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{c}}} \right) + \dots \\
& \left. + \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^T \left( \sum_{i=v}^{\omega} \Delta \boldsymbol{\varphi}_\sigma \hat{\mathbf{w}}_i S_{\Lambda i} + \gamma_5^{-1} \dot{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \right) \right] \quad (3-54)
\end{aligned}$$

Si consideramos las reglas de ajuste de la forma:

$$\dot{\tilde{\mathbf{w}}}_i(t) = -\gamma_1 S_{\Lambda i} \hat{\boldsymbol{\varphi}}(\bar{\mathbf{x}}) \quad (3-55)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{W}}}_i(t) = -\gamma_2 S_{\Lambda i} \mathbf{u}(t) \quad (3-56)$$

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}_i(t) = -\gamma_3 S_{\Lambda i} \boldsymbol{\chi}(S_i) \quad (3-57)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{c}}} = -\gamma_4 \sum_{i=v}^{\omega} \tilde{\mathbf{c}}^T \Delta \boldsymbol{\varphi}_c \hat{\mathbf{w}}_i S_{\Lambda i} \quad (3-58)$$

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} = -\gamma_5 \sum_{i=v}^{\omega} \Delta \boldsymbol{\varphi}_\sigma \hat{\mathbf{w}}_i S_{\Lambda i} \quad (3-59)$$

Adoptando las reglas de ajuste y reemplazando en la ecuación (3-54) obtenemos

$$\dot{V}_2 = \sum_{i=v}^{\omega} -a_i(t)S_{\Lambda i}^2 + S_{\Lambda i}(\varepsilon_i + \Delta_i) - \Gamma_i |S_{\Lambda i}| < 0 \quad (3-60)$$

Este resultado demuestra la convergencia de la ley de control ley de control propuesta. Las ecuaciones que describen las leyes de adaptación son las expresadas en (3-55)-(3-59), pero una implementación práctica de las leyes de adaptación debe expresarse en términos de estimación. Entonces, sustituyendo (3-37) en (3-55)- (3-59) conduce a:

$$\frac{d\tilde{\mathbf{w}}_i}{dt} = \frac{d}{dt} (\mathbf{w}_i^* - \hat{\mathbf{w}}_i(t)) = -\frac{d\hat{\mathbf{w}}_i}{dt} \quad (3-61)$$

Ya que los valores óptimos son constantes y desconocidos.

Donde las leyes de ajuste quedan expresadas por:

$$\dot{\hat{\mathbf{w}}}_i(t) = \gamma_1 S_{\Lambda i} \hat{\boldsymbol{\varphi}}(\bar{\mathbf{x}}) \quad (3-62)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{W}}}_i(t) = \gamma_2 S_{\Lambda i} \mathbf{u}(t) \quad (3-63)$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\omega}}}_i(t) = \gamma_3 S_{\Lambda i} \boldsymbol{\chi}(S_i) \quad (3-64)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{c}}} = \gamma_4 \sum_{i=v}^{\omega} \tilde{\mathbf{c}}^T \Delta \boldsymbol{\varphi}_c \hat{\mathbf{w}}_i S_{\Lambda i} \quad (3-65)$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}} = \gamma_5 \sum_{i=v}^{\omega} \Delta \boldsymbol{\varphi}_\sigma \hat{\mathbf{w}}_i S_{\Lambda i} \quad (3-66)$$

Estas ecuaciones representan una ley de adaptación práctica para los pesos neuronales en aplicaciones donde se utilice un ajuste en línea.

### 3.7. Resultados experimentales

Para el experimento, se utiliza un WMR Pioneer 2DX de Active Media Inc. (figura 3-4). El Pioneer 2DX tiene un ordenador de a bordo 800 MHz Intel/Pentium III con 512 Mb de RAM en el que se programó el controlador.



figura 3-4: Robot Móvil Pioneer 2DX

La posición del WMR se determina mediante sensores odométricos (figura 3-4). Para el ajuste de los parámetros de la red neuronal pesos ( $\mathbf{w}$ ,  $\mathbf{W}$  y  $\mathbf{\omega}$ ), centros ( $\mathbf{c}$ ), dispersión ( $\sigma$ ), se inicializan los llamados parámetros con valores aleatorios. Al mismo tiempo, el robot debe seguir una trayectoria predeterminada (en este caso una bandeja. Elíptica) donde el sistema de control propuesto ajusta sus parámetros de acuerdo a las leyes de ajuste establecidas por el criterio de Lyapunov Ecs. (3-62)-(3-66), que al cabo de un determinado momento, se estabilizan y permanecen constantes. El experimento se realizará con los valores obtenidos durante el entrenamiento. En este experimento, el robot se inicia en la posición  $(x_{ref}, y_{ref}) = (0, 0)m$ . El robot debe seguir una referencia de trayectoria en forma de curva de Lysajous definida como:

$$\begin{cases} x_{ref} = 1,5 \text{ sen}(0,025\pi t) \\ y_{ref} = 0,4 \text{ sen}(0,05\pi t) \end{cases} \quad (3-67)$$

Durante el proceso de seguimiento de las trayectorias de referencia, las señales de control del robot móvil (WMR) se han cambiado simultáneamente, pasando de utilizar únicamente el controlador cinemático convencional a los esquemas de neurocontrol de aprendizaje de errores por retroalimentación en modo deslizante propuestos (Sw1 en la figura 3-2: Estructura de control basado en Neuro Adaptable- SMC en Tiempo discreto). Las ganancias del controlador cinemático implementado son  $k_x = 0,7$  y  $k_y = 0,7$  [2]. Los resultados experimentales registrados se presentan en las figura 3-5, figura 3-6 y figura 3-7. La respuesta conducida únicamente por el controlador cinemático se caracteriza por un mayor valor del error de seguimiento debido a las inercias y cargas variables en el tiempo existentes y a las incertidumbres del modelo.

Dado que el NA-SMC puede compensar estos fenómenos a través del aprendizaje, la respuesta real se aproxima mejor a la respuesta deseada. Se puede observar que tras el cambio realizado al esquema de neurocontrol propuesto, las señales de velocidad cinemática son cambiadas por el NA-SMC, los errores de seguimiento se reducen significativamente y la posición de error sigue de cerca las trayectorias requeridas demostrando un muy buen rendimiento de seguimiento del esquema de control propuesto.

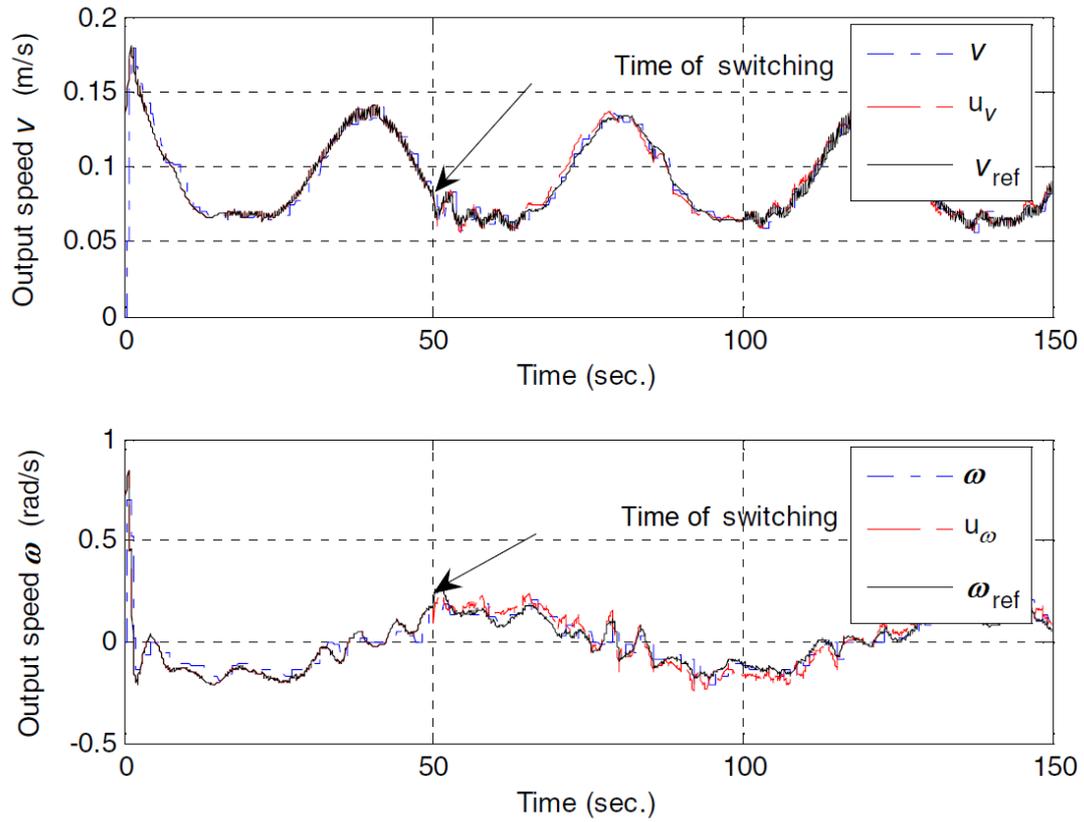


figura 3-5: velocidades y acciones de control del Robot móvil cuando se cambia a modo deslizante control neuroadaptativo

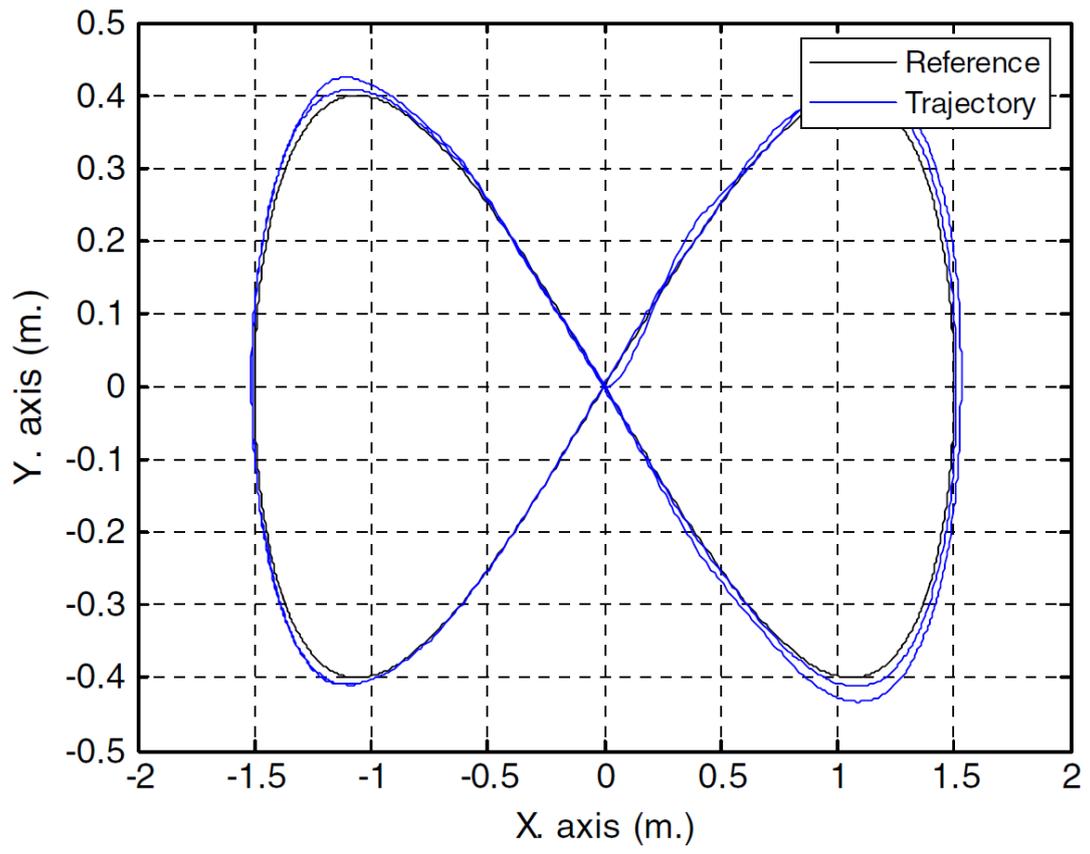


figura 3-6: Trayectoria de referencia y trayectoria seguida por el robot móvil mediante NA-SMC

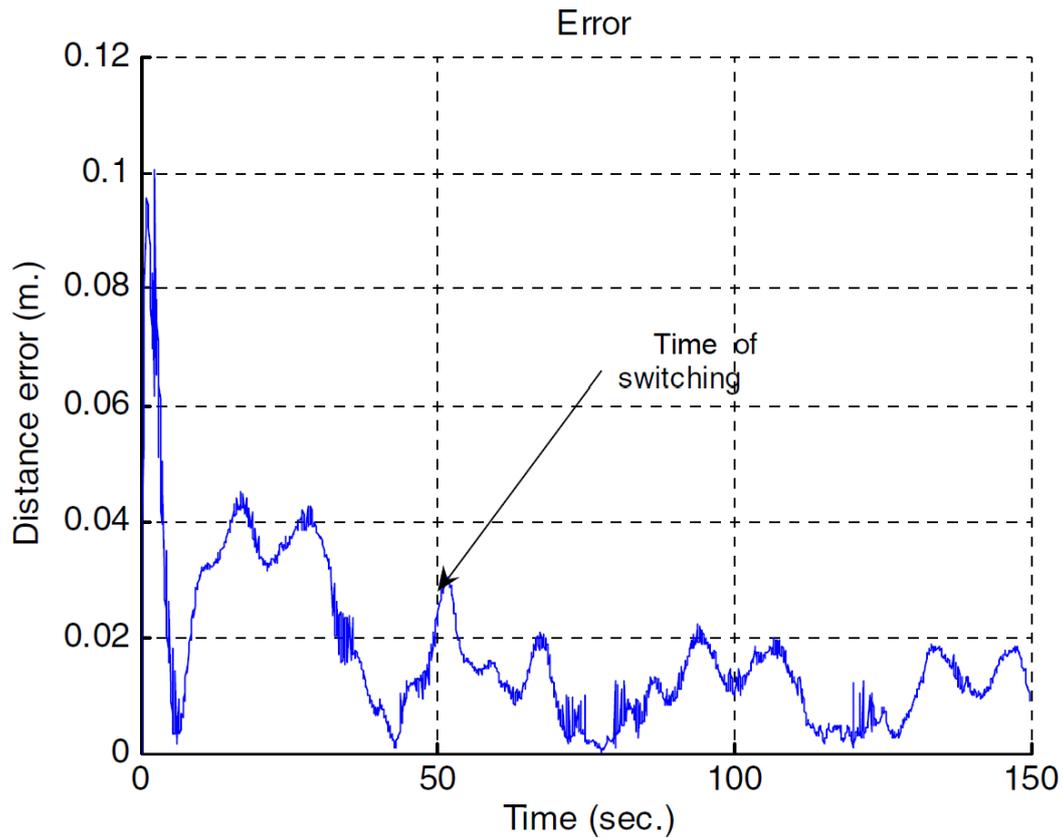


figura 3-7: Norma del error de trayectoria utilizando un controlador NA-SMC y un control inverso para la cinemática

### 3.8.Observación final

Esta técnica de control se ha aplicado para el seguimiento de la trayectoria de WMR con variaciones paramétricas y dinámica no modelada (incertidumbres) que pueden ocurrir en la estructura dinámica del robot, incluyendo otras incertidumbres del robot. La principal contribución de este trabajo de investigación es que no requiere un conocimiento previo de la estructura dinámica o sus parámetros para calcular la ley de control propuesta. Este diseño obtiene robustez en el sentido de que el mecanismo de autoajuste puede ajustar automáticamente el controlador neuronal mediante un algoritmo de aprendizaje y la estabilidad asintótica global del algoritmo se establece mediante el criterio de estabilidad de Lyapunov. Cuando se produce el mapeo con el modelo, el sistema de control global se convierte en un sistema dinámico estable.

El diseño puede alcanzar el objetivo del control compuesto no lineal multivariable y también garantizar que el error de seguimiento de la salida pueda converger finalmente a cero.

## Capítulo 4. Control de un vehículo marino usando compensación neuro adaptable basada en Superficies deslizantes.

### 4.1. Resumen del Capitulo

En este Capítulo presenta el diseño de una técnica de control basada en la combinación del Álgebra Lineal (LABC) con el Control Neuro Adaptativo de Modo Deslizante (NN-SMC) aplicada al control de un vehículo marino. Donde la técnica de Álgebra lineal controla la cinemática del vehículo y la estructura neuro adaptable- basada en superficies deslizantes (SMC) controla su dinámica. Donde la capacidad adaptativa de las redes neuronales se ajusta a la dinámica del vehículo, que incluye la dinámica no modelada. Para demostrar la viabilidad de la técnica propuesta el vehículo marino es sometido a distintos tipos de perturbaciones, que incluyen la acción de las olas y el viento. Los resultados de la simulación muestran resultados satisfactorios, especialmente cuando las perturbaciones actúan sobre su dinámica. Finalmente, se demostró la convergencia de la técnica propuesta utilizando la teoría de Lyapunov.

### 4.2. Descripción del Modelo del Buque:

Considerando los modelos del barco descritos en [44],[40].

Modelo Cinemático

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u\cos(\psi) - v\sin(\psi) \\ \dot{y} &= u\sin(\psi) + v\cos(\psi) \\ \dot{\psi} &= r \end{aligned} \quad (4-1)$$

Modelo Dinámico

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{C}(\mathbf{v})\mathbf{v} + \mathbf{D}\mathbf{v} = \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (4-2)$$

En (1)  $\mathbf{y} = [x, y, \psi]^T$  indica el vector de posición en marco de referencia fijo en la tierra, In (2)  $\mathbf{v} = [u, v, r]^T \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$  representa el vector de velocidad en marco de referencia fijo,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}(\mathbf{v})$  y  $\mathbf{D}$  son la matriz de inercia del barco, la matriz de Coriolis y centrífuga y por último la matriz de fricción hidrodinámica, respectivamente;

$\mathbf{u} = [T_u, T_r]^T$  es el vector de acción de control sobre el barco, donde  $T_u$  y  $T_r$  son el control de avance y giro. La masa y la matriz de inercia se consideran simétricas y definidas positivas, esto es debido por el hecho de que la mayoría de los buques de superficie marina son simétricos con respecto al eje babor-estribor. En particular, la estructura de las matrices  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{D}$  que son consideradas como ([41]):

$$\mathbf{M} \triangleq \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & m_{23} \\ 0 & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} = \mathbf{M}^T; \mathbf{D} \triangleq \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & d_{23} \\ 0 & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix} \quad (4-3)$$

Con la estructura de la matriz  $\mathbf{M}$  mostrada en (3), la matriz de Coriolis y centrípeta  $\mathbf{C}(\mathbf{v})$  es parametrizada como se muestra en (4) ([40],[42]). La matriz de entrada (o del actuador)  $\mathbf{B}$  condiciona las entradas de control en fuerzas y momentos que actúan sobre el buque,

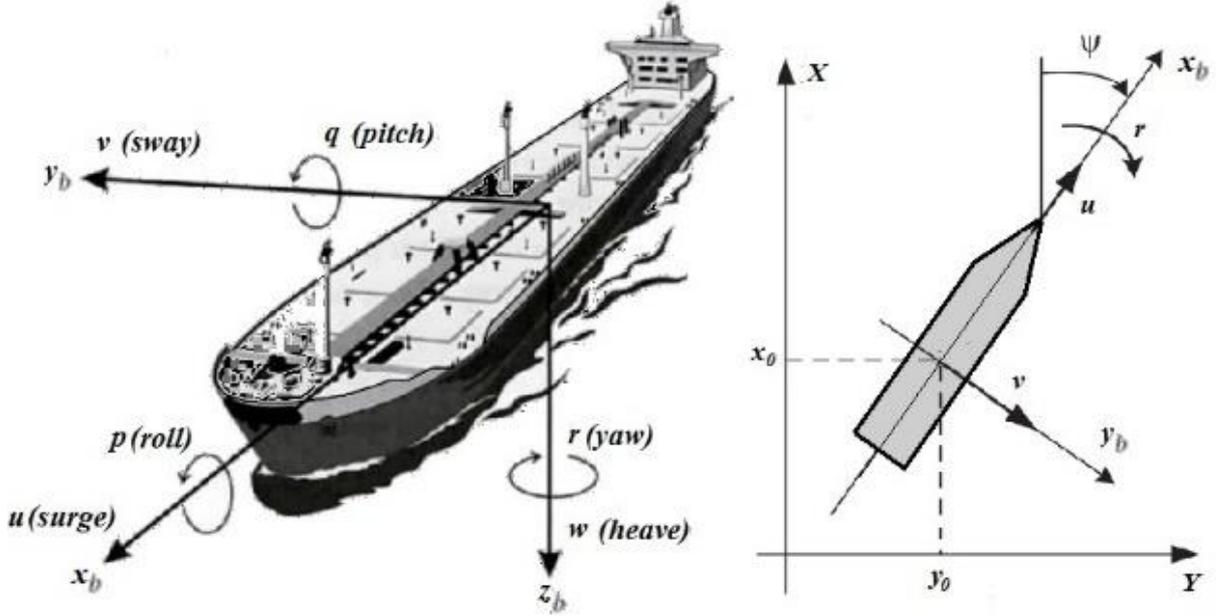


figura 4-1: Marco de coordenadas fijos del cuerpo  $B$  y marco de coordenadas global  $U$

$$C(\mathbf{v}) \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 0 & -m_{22}v - m_{23}r \\ 0 & 0 & m_{11}u \\ -m_{22}v + m_{23}r & -m_{11}u & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{B} \triangleq \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & b_{32} \end{bmatrix} \quad (4-4)$$

Finalmente, luego de simple operaciones el modelo dinámico del barco puede ser reorganizado como,

$$\begin{aligned} \dot{u} &= f_1 + \frac{b_{11}}{m_{11}} T_u \\ \dot{r} &= \kappa(f_2 + b_{32} T_r) \end{aligned} \quad (4-5)$$

Donde:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{m_{22}}{m_{11}} vr + \frac{m_{23}}{m_{11}} r^2 - \frac{d_{11}}{m_{11}} u \\ f_2 &= (m_{11} - m_{22})vu + \left(\frac{m_{11}m_{23}}{m_{22}} - m_{23}\right)ru + \left(\frac{d_{22}m_{23}}{m_{22}} - d_{32}\right)v + \left(\frac{d_{23}m_{23}}{m_{22}} - d_{33}\right)r \end{aligned} \quad (4-6)$$

$$\kappa = \frac{m_{22}}{m_{22}m_{33} - m_{23}^2} \quad (4-7)$$

### 4.3. Desarrollo del controlador basado en algebra lineal

Para el desarrollo del controlador cinemático basado en control inverso, primero se definen los errores de trayectoria  $\tilde{x}, \tilde{y}$  en (4-8). Donde  $x_{ref}, y_{ref}$  son las coordenadas de la referencia de posición. El propósito de esta sección es el desarrollo de una ley de control basada en la técnica de algebra lineal (LABC) para el seguimiento de trayectorias [41]. A continuación, se define el vector de error de salida  $\tilde{\mathbf{y}} = [\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\psi}]^T$  y  $\psi = r$

$$\tilde{\mathbf{y}} = [\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\psi}]^T = [x_{ref} - x, y_{ref} - y, \psi_{ref} - \psi]^T \quad (4-8)$$

Y expresando las dos primeras líneas de (4-1) como:

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ r \end{bmatrix} \quad (4-9)$$

de (4-9) el control cinemático propuesto puede ser representado representado como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} + v\sin(\psi) \\ \dot{y} - v\cos(\psi) \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ r \end{bmatrix} \quad (4-10)$$

O

$$\begin{bmatrix} \dot{x} + v\sin(\psi) \\ \dot{y} - v\cos(\psi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\psi) \\ \sin(\psi) \end{bmatrix} u \quad (4-11)$$

de (4-11), la ley control puede ser obtenida de:

$$\begin{bmatrix} \cos(\psi) \\ \sin(\psi) \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} \dot{x}_{ref} + k_x \tilde{x} + v\sin(\psi) \\ \dot{y}_{ref} + k_y \tilde{y} - v\cos(\psi) \end{bmatrix} \quad (4-12)$$

Donde  $k_x, k_y$  son ganancias del lazo de control cinemático, es fácil demostrar que:

$$tg(\psi_{ref}) = \frac{\dot{y}_{ref} + k_y \tilde{y} - v\cos(\psi)}{\dot{x}_{ref} + k_x \tilde{x} + v\sin(\psi)} \quad (4-13)$$

entonces

$$\begin{aligned} u_{ref} &= (\dot{y}_{ref} + k_y \tilde{y} - v\cos(\psi)) \sin(\psi_{ref}) + \dots \\ &+ (\dot{x}_{ref} + k_x \tilde{x} + v\sin(\psi)) \cos(\psi_{ref}) \end{aligned} \quad (4-14)$$

y

$$r_{ref} = (\dot{\psi}_{ref} + k_\psi \tilde{\psi}) \quad (4-15)$$

aproximando  $\cos(\psi)$  por series de Taylor

$$\begin{aligned} \cos(\psi) &= \cos(\psi_{ref}) - \text{sen}(\psi_{ref} + \lambda(\psi - \psi_{ref})) (\psi - \psi_{ref}) = \dots \\ &= \cos(\psi_{ref}) + \text{sen}(\psi_\lambda) \tilde{\psi} \end{aligned} \quad (4-16)$$

Donde  $\psi_\lambda = \psi_{ref} + \lambda(\psi - \psi_{ref})$ ,  $\tilde{\psi} = \psi_{ref} - \psi$  y  $0 < \lambda < 1$ , tomando  $\dot{x}$  de la ec.(4-9) y reemplazando en (4-16),

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u\cos(\psi) - v\sin(\psi) = u(\cos(\psi_{ref}) + \text{sen}(\psi_\lambda) \tilde{\psi}) - v\sin(\psi) = \dots \\ &= u\cos(\psi_{ref}) + u\text{sen}(\psi_\lambda) \tilde{\psi} - v\sin(\psi) \end{aligned} \quad (4-17)$$

de (4-14) y renombrando  $\Delta y = \dot{y}_{ref} + k_y \tilde{y} - v\cos(\psi)$  y También a  $\Delta x = \dot{x}_{ref} + k_x \tilde{x} + v\sin(\psi)$  y multiplicando ambas ecuaciones por  $\cos(\psi_{ref})$  conduce a:

$$u_{ref}\cos(\psi_{ref}) = (\Delta y)\sin(\psi_{ref})\cos(\psi_{ref}) + (\Delta x)\cos^2(\psi_{ref}) \quad (4-18)$$

Teniendo cuenta (4-13) y reordenando.

$$\Delta y \sin(\psi_{ref}) = \Delta x \cos(\psi_{ref}) \quad (4-19)$$

haciendo  $\Delta y = (\Delta x \cos(\psi_{ref}) / \sin(\psi_{ref}))$  y reemplazando en (4-18)

$$u_{ref} \cos(\psi_{ref}) = (\Delta x) \sin^2(\psi_{ref}) + (\Delta x) \cos^2(\psi_{ref}) = \Delta x \quad (4-20)$$

Con (4-20) y reordenando (4-17), se obtiene:

$$\dot{x} = \Delta x + u \sin(\psi_\lambda) \tilde{\psi} - v \sin(\psi) \quad (4-21)$$

Reemplazando  $\Delta x$  en (4-21)

$$\dot{\tilde{x}} + k_x \tilde{x} + u \sin(\psi_\lambda) \tilde{\psi} = 0 \quad (4-22)$$

Y de la misma forma para  $y$

$$\dot{\tilde{y}} + k_y \tilde{y} - u \cos(\psi_\rho) e_\psi = 0 \quad \text{siendo} \quad 0 < \rho < 1 \quad (4-23)$$

Y para  $\psi$

$$\dot{\tilde{\psi}} = -\frac{k_\psi}{l_\psi} \tilde{\psi} \quad (4-24)$$

Considerando la teoría de Lyapunov para probar la estabilidad de  $\tilde{\psi}$ , la función candidata de Lyapunov es (CLF):

$$V = \frac{1}{2} (\tilde{\psi}^2 + \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2) \quad (4-25)$$

Derivando (4-25) y reemplazando la ec. (4-22), (4-23) y (4-24).

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \tilde{\psi} \dot{\tilde{\psi}} + \tilde{x} \dot{\tilde{x}} + \tilde{y} \dot{\tilde{y}} = \dots \\ &= -k_\psi (\tilde{\psi})^2 - \tilde{x} (k_x \tilde{x} + u \sin(\psi_\lambda) \tilde{\psi}) - \dots \\ &\quad - \tilde{y} (k_y \tilde{y} + u \cos(\psi_\rho) \tilde{\psi}) = \dots \\ &= -k_\psi \tilde{\psi}^2 - k_x \tilde{x}^2 - \tilde{x} u \sin(\psi_\lambda) \tilde{\psi} - \dots \\ &\quad - k_y \tilde{y}^2 - \tilde{y} u \cos(\psi_\rho) \tilde{\psi} \end{aligned} \quad (4-26)$$

Considerando los términos como  $|u \sin(\psi_\lambda)| \tilde{\psi} \tilde{x} \leq k_\lambda \tilde{x} \tilde{\psi}$  e  $|\tilde{y} u \cos(\psi_\rho)| \tilde{\psi} \tilde{y} \leq k_\rho \tilde{y} \tilde{\psi}$ , siendo  $k_\lambda$  y  $k_\rho$  valores constantes, debido a que  $u \leq u_{max}$ ,  $\sin(\psi_\lambda)$  y  $\cos(\psi_\rho)$  son señales acotadas. Reescribiendo (4-26), se puede ver como:

$$\dot{V} = -k_\psi \tilde{\psi}^2 - k_x \tilde{x}^2 - k_\lambda \tilde{x} \tilde{\psi} - k_y \tilde{y}^2 - k_\rho \tilde{y} \tilde{\psi} \quad (4-27)$$

Aplicando norma en (4-27)

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -k_\psi |\tilde{\psi}|^2 - k_x |\tilde{x}|^2 + k_\lambda |\tilde{x}| |\tilde{\psi}| - \dots \\ &\quad - k_y |\tilde{y}|^2 + k_\rho |\tilde{y}| |\tilde{\psi}| = \dots \\ &= -k_\psi |\tilde{\psi}|^2 + |\tilde{x}| (-k_x |\tilde{x}| + k_\lambda |\tilde{\psi}|) + \dots \\ &\quad + |\tilde{y}| (-k_y |\tilde{y}| + k_\rho |\tilde{\psi}|) \leq 0 \end{aligned} \quad (4-28)$$

Para garantizar la convergencia

$$\begin{cases} |\tilde{x}| \geq \frac{k_\lambda}{k_x} |\tilde{\psi}| \\ |\tilde{y}| \geq \frac{k_\rho}{k_y} |\tilde{\psi}| \end{cases} \quad (4-29)$$

De (4-28)  $|\tilde{\psi}| \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , entonces  $|\tilde{x}|$  y  $|\tilde{y}| \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Este resultado considera que no existe dinámica y existe seguimiento perfecto de velocidad. Esta consideración será nuevamente estudiada en la sección siguiente 4.4 cuando la estabilidad completa sea considerada.

#### 4.4. Compensación basada en Superficies deslizantes

Ahora renombrando el vector de salida de la dinámica como  $\mathbf{x} = [u, r]^T$ ,  $\mathbf{x}_{ref} = [u_{ref}, r_{ref}]^T$  y  $\mathbf{u} = [T_u, T_r]^T$ , entonces la ec.(4-5) puede ser expresada como:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ \kappa f_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{b_{11}}{m_{11}} & 0 \\ 0 & b_{32} \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (4-30)$$

Definiendo el error de seguimiento y su derivada como:

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \mathbf{x}_{ref} - \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{e}} &= \dot{\mathbf{x}}_{ref} - \dot{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (4-31)$$

Ahora si definimos la superficie deslizante en términos del error de seguimiento:

$$\mathbf{S}(t) = \begin{bmatrix} \left(\lambda_u + \frac{d}{dt}\right) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \left(\lambda_r + \frac{d}{dt}\right) \end{bmatrix} \int_0^t \mathbf{e}(\tau) d\tau = \mathbf{\Lambda} \int_0^t \mathbf{e}(\tau) d\tau + \mathbf{e}(t) \quad (4-32)$$

Donde  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_u, \lambda_r)$  y calculando la derivada  $\dot{\mathbf{S}}(t)$  como:

$$\dot{\mathbf{S}}(t) = \mathbf{\Lambda}\mathbf{e}(t) + \dot{\mathbf{e}}(t) \quad (4-33)$$

Para que el estado permanezca en la superficie de deslizamiento, hacemos  $\dot{\mathbf{S}}(t) = 0$ , y reemplazando  $\dot{\mathbf{x}}_{ref}$  en (4-33)

$$\dot{\mathbf{S}}(t) = \mathbf{\Lambda}\mathbf{e}(t) + (\dot{\mathbf{x}}_{ref} - \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{\Lambda}\mathbf{e}(t) + (\dot{\mathbf{x}}_{ref} - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}\mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad (4-34)$$

Despejando el vector variable  $\mathbf{u}$  de (4-34)

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}^{-1}[\mathbf{\Lambda}\mathbf{e}(t) + \dot{\mathbf{x}}_{ref} - \mathbf{f}(\mathbf{x})] \quad (4-35)$$

Pero la dinámica real es desconocida, El diseñador solo conoce las funciones estimadas  $\hat{\mathbf{g}}$  y  $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$ , en base a estas funciones se debe construir la ley de control. Añadiendo un término discontinuo  $\mathbf{\Gamma}\text{sign}(\mathbf{S}(t))$  la ley de control conduce a:

$$\mathbf{u}_c = \hat{\mathbf{g}}^{-1}[\mathbf{A}\mathbf{S}(t) + \mathbf{\Lambda}\mathbf{e}(t) + \dot{\mathbf{x}}_{ref} - \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) + \mathbf{\Gamma}sign(\mathbf{S})] \quad (4-36)$$

Donde  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{\Gamma}$  son matrices diagonales definidas positivas.

Ahora considerando (4-34) y sumando y restando el termino  $\hat{\mathbf{g}}\mathbf{u}$  conduce a:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{S}}(t) &= \mathbf{\Lambda}\mathbf{e}(t) + (\dot{\mathbf{x}}_{ref} - \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{\Lambda}\mathbf{e}(t) + (\dot{\mathbf{x}}_{ref} - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}\mathbf{u} + \hat{\mathbf{g}}\mathbf{u} - \hat{\mathbf{g}}\mathbf{u}) = \\ &= \mathbf{\Lambda}\mathbf{e}(t) + (\dot{\mathbf{x}}_{ref} - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \hat{\mathbf{g}}\mathbf{u}) + (\hat{\mathbf{g}} - \mathbf{g})\mathbf{u} \end{aligned} \quad (4-37)$$

reemplazando (39) en (40)

$$\dot{\mathbf{S}}(t) = -\mathbf{A}\mathbf{S}(t) - \mathbf{\Gamma}sign(\mathbf{S}) + \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) + \tilde{\mathbf{g}}\mathbf{u} \quad (4-38)$$

Donde  $\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})$  y  $\tilde{\mathbf{g}} = \hat{\mathbf{g}} - \mathbf{g}$

**Consideración 1:** la diferencia de funciones  $\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$  y  $\tilde{\mathbf{g}}\mathbf{u}$  son acotadas por  $\lambda_{min}(\mathbf{\Gamma}) \geq \|\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) + \tilde{\mathbf{g}}\mathbf{u}\|$

Reordenando (4-38), se obtiene la ecuación diferencial del error de deslizamiento

$$\dot{\mathbf{S}}(t) = -\mathbf{A}\mathbf{S}(t) - \mathbf{\Gamma}sign(\mathbf{S}) + \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) + \tilde{\mathbf{g}}\mathbf{u} \quad (4-39)$$

**Teorema 4-1:** Prueba de estabilidad, ahora considerando la candidata de Lyapunov como:

$$V = \frac{1}{2}[\mathbf{S}^T\mathbf{S}] \quad (4-40)$$

derivando (4-40) y reemplazando (4-38)

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \mathbf{S}^T\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{S}^T(-\mathbf{A}\mathbf{S}(t) - \mathbf{\Gamma}sign(\mathbf{S}) + \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) + \tilde{\mathbf{g}}\mathbf{u}) = \dots \\ &= (-\mathbf{S}^T\mathbf{A}\mathbf{S} - \mathbf{\Gamma}|\mathbf{S}| + \mathbf{S}^T\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) + \mathbf{S}^T\tilde{\mathbf{g}}\mathbf{u}) \end{aligned} \quad (4-41)$$

Aplicando norma en (4-41)

$$\dot{V} = -\lambda_{min}(\mathbf{A})\|\mathbf{S}\|^2 - \lambda_{min}(\mathbf{\Gamma})\|\mathbf{S}\| + \|\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x})\|\|\mathbf{S}\| + \|\tilde{\mathbf{g}}\mathbf{u}\|\|\mathbf{S}\| \quad (4-42)$$

De la Consideración 1, es fácil probar que  $(-\lambda_{min}(\mathbf{\Gamma}) + \|\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x})\| + \|\tilde{\mathbf{g}}\mathbf{u}\|) = \beta \leq 0$

$$\dot{V} = -\lambda_{min}(\mathbf{A})\|\mathbf{S}\|^2 - \beta\|\mathbf{S}\| < 0 \quad (4-43)$$

La Ec.(4-43) prueba que la ley de control propuesta es asintóticamente estable, pero la función no lineal ( $sign(\cdot)$ ) puede introducir el efecto “chattering” en el sistema de control. Para reducir esta posibilidad un término adaptable es adicionado en ec. (4-36),

$$\mathbf{u}_c = \hat{\mathbf{g}}^{-1}[\mathbf{A}\mathbf{S}(t) + \mathbf{\Lambda}\mathbf{e}(t) + \dot{\mathbf{x}}_{ref} - \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}_N + \mathbf{\Gamma}sign(\mathbf{S})] \quad (4-44)$$

Donde  $\mathbf{v}_N$  es una función acotada representada por

$$\mathbf{v}_N = \mathbf{w}^{*T}\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) + \mathbf{W}^{*T}\mathbf{u} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4-45)$$

Donde la función  $\mathbf{w}^{*T} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) + \mathbf{W}^{*T} \mathbf{u} + \boldsymbol{\varepsilon}$  es la función de parámetros adaptables de compensación  $\mathbf{w}^* \in \mathbb{R}^{5 \times 2}$  y  $\mathbf{W}^* \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  son los parámetros óptimos que minimizan el error de control, los cuales son constantes y desconocidos, y  $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$  es el mínimo valor de error introducido por la función para los parámetros óptimos. Por último, el vector  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{5 \times 1}$  donde cada elemento es función de  $\mathbf{x}$  ( $\varphi_i(\mathbf{x}) = \exp(-\|\mathbf{x} - \mathbf{c}_i\|/\sigma_i)$ ), siendo  $\mathbf{c}_i$  y  $\sigma_i$  parámetros de la función exponencial.

**Consideración 2:** el error de aproximación de la compensación neuronal  $\boldsymbol{\varepsilon}$  es acotado por ( $\|\boldsymbol{\varepsilon}\| \leq \lambda_{\min}(\Gamma)$ ).

donde  $\mathbf{w}^* = \hat{\mathbf{w}} - \tilde{\mathbf{w}}$  y  $\mathbf{W}^* = \hat{\mathbf{W}} - \tilde{\mathbf{W}}$  reemplazando en (4-45) y (4-44) conduce a:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_c = & \hat{\mathbf{g}}^{-1} [\mathbf{A}\mathbf{S}(t) + \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{e}(t) + \dot{\mathbf{x}}_{ref} - \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) + \dots \\ & + (\hat{\mathbf{w}}^T \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) - \tilde{\mathbf{w}}^T \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) + \hat{\mathbf{W}}^T \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{W}}^T \mathbf{u} + \boldsymbol{\varepsilon}) + \Gamma \text{sign}(\mathbf{S})] \end{aligned} \quad (4-46)$$

Haciendo nuevamente ( $\mathbf{u} = \mathbf{u}_c$ ) y reemplazando en (4-37)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{S}}(t) = & - \left( \mathbf{A}\mathbf{S}(t) + (\hat{\mathbf{w}}^T \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) - \tilde{\mathbf{w}}^T \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) + \hat{\mathbf{W}}^T \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{W}}^T \mathbf{u} + \boldsymbol{\varepsilon}) + \Gamma \text{sign}(\mathbf{S}) \right) \\ & + \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) + \tilde{\mathbf{g}}\mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{S}}(t) = & -\mathbf{A}\mathbf{S}(t) - (\hat{\mathbf{w}}^T \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) - \tilde{\mathbf{w}}^T \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) + \hat{\mathbf{W}}^T \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{W}}^T \mathbf{u} + \boldsymbol{\varepsilon}) - \Gamma \text{sign}(\mathbf{S}) \\ & + \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) + \tilde{\mathbf{g}}\mathbf{u} \end{aligned} \quad (4-47)$$

La función de aproximación [30],[31] puede compensar las variaciones del error, estos errores son causados por incertidumbre paramétrica y perturbaciones externas, por lo tanto  $\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{w}}^T \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$ ;  $\tilde{\mathbf{g}}\mathbf{u} = \hat{\mathbf{W}}^T \mathbf{u}$ , entonces la ec. (4-47) puede ser reescrita como:

$$\dot{\mathbf{S}}(t) = -\mathbf{A}\mathbf{S}(t) + (\tilde{\mathbf{w}}^T \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) + \tilde{\mathbf{W}}^T \mathbf{u} + \boldsymbol{\varepsilon}) - \Gamma \text{sign}(\mathbf{S}) \quad (4-48)$$

La ecuación diferencial representada en (4-48) indica la evolución del error de control, es necesario demostrar que el error se encuentra acotado para probar su estabilidad. Proponiendo una función candidata de Lyapunov de la forma:

$$V = \frac{1}{2} \left[ \mathbf{S}^T \mathbf{P} \mathbf{S} + \frac{\text{tr}(\tilde{\mathbf{w}}^T \tilde{\mathbf{w}})}{\gamma_1} + \frac{\text{tr}(\tilde{\mathbf{W}}^T \tilde{\mathbf{W}})}{\gamma_2} \right] \quad (4-49)$$

Donde  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  es una matriz diagonal con elementos positivos

Ahora derivando (4-49)

$$\dot{V} = \mathbf{S}^T \dot{\mathbf{S}} + \frac{\text{tr}(\tilde{\mathbf{w}}^T \dot{\tilde{\mathbf{w}}})}{\gamma_1} + \frac{\text{tr}(\tilde{\mathbf{W}}^T \dot{\tilde{\mathbf{W}}})}{\gamma_2} \quad (4-50)$$

Reemplazando (4-48) en (4-50)

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \mathbf{S}^T \left( -\mathbf{A}\mathbf{S}(t) + (\tilde{\mathbf{w}}^T \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) + \tilde{\mathbf{W}}^T \mathbf{u} + \boldsymbol{\varepsilon}) - \Gamma \text{sign}(\mathbf{S}) \right) + \dots \\ & + \frac{\text{tr}(\tilde{\mathbf{w}}^T \dot{\tilde{\mathbf{w}}})}{\gamma_1} + \frac{\text{tr}(\tilde{\mathbf{W}}^T \dot{\tilde{\mathbf{W}}})}{\gamma_2} \end{aligned} \quad (4-51)$$

Operando

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -\mathbf{S}^T \mathbf{A} \mathbf{S} + \mathbf{S}^T \tilde{\mathbf{w}}^T \boldsymbol{\varphi}(x) + \mathbf{S}^T \tilde{\mathbf{W}}^T \mathbf{u} + \mathbf{S}^T \boldsymbol{\varepsilon} - \Gamma |\mathbf{S}| + \dots \\ & + \frac{\text{tr}(\tilde{\mathbf{w}}^T \dot{\tilde{\mathbf{w}}})}{\gamma_1} + \frac{\text{tr}(\tilde{\mathbf{W}}^T \dot{\tilde{\mathbf{W}}})}{\gamma_2} \end{aligned} \quad (4-52)$$

Los términos  $\mathbf{S}^T \tilde{\mathbf{w}}^T \boldsymbol{\varphi}(x)$  y  $\mathbf{S}^T \tilde{\mathbf{W}}^T \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$

$$\mathbf{S}^T \tilde{\mathbf{w}}^T \boldsymbol{\varphi}(x) = \text{tr}(\mathbf{S}^T \tilde{\mathbf{w}}^T \boldsymbol{\varphi}(x)) = \text{tr}(\tilde{\mathbf{w}}^T \boldsymbol{\varphi}(x) \mathbf{S}^T) \quad (4-53)$$

$$\mathbf{S}^T \tilde{\mathbf{W}}^T \mathbf{u} = \text{tr}(\mathbf{S}^T \tilde{\mathbf{W}}^T \mathbf{u}) = \text{tr}(\tilde{\mathbf{W}}^T \mathbf{u} \mathbf{S}^T) \quad (4-54)$$

Reemplazando en (4-52) y operando

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -\mathbf{S}^T \mathbf{A} \mathbf{S} + \text{tr} \left( \tilde{\mathbf{w}}^T \left( \boldsymbol{\varphi}(x) \mathbf{S}^T + \frac{\dot{\tilde{\mathbf{w}}}}{\gamma_1} \right) \right) + \text{tr} \left( \tilde{\mathbf{W}}^T \left( \mathbf{u} \mathbf{S}^T + \frac{\dot{\tilde{\mathbf{W}}}}{\gamma_2} \right) \right) + \dots \\ & + \mathbf{S}^T \boldsymbol{\varepsilon} - \Gamma |\mathbf{S}| \end{aligned} \quad (4-55)$$

De las ecuaciones anteriores si hacemos

$$\dot{\tilde{\mathbf{w}}} = -\gamma_1 \boldsymbol{\varphi}(x) \mathbf{S}^T \quad (4-56)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{W}}} = -\gamma_2 \mathbf{u} \mathbf{S}^T$$

Y las reemplazamos en (4-55) quedan expresada como

$$\dot{V} = -\mathbf{S}^T \mathbf{A} \mathbf{S} + \mathbf{S}^T \boldsymbol{\varepsilon} - \Gamma |\mathbf{S}| \quad (4-57)$$

Aplicando norma

$$\dot{V} = -\lambda_{\min}(\mathbf{A}) \|\mathbf{S}\|^2 + \|\boldsymbol{\varepsilon}\| \|\mathbf{S}\| - \lambda_{\min}(\Gamma) \|\mathbf{S}\| \quad (4-58)$$

Teniendo en cuenta la Consideración 2, entonces  $\|\boldsymbol{\varepsilon}\| - \lambda_{\min}(\Gamma) = \boldsymbol{\rho} \leq \mathbf{0}$ , reemplazando esta consideración en (4-58) conduce a:

$$\dot{V} = -\lambda_{\min}(\mathbf{A}) \|\mathbf{S}\|^2 - \boldsymbol{\rho} \|\mathbf{S}\| \leq \mathbf{0} \quad (4-59)$$

Con este resultado se demuestra que el controlador propuesto es asintóticamente estable. Esta condición reduce los efectos de las perturbaciones en el sistema de control.

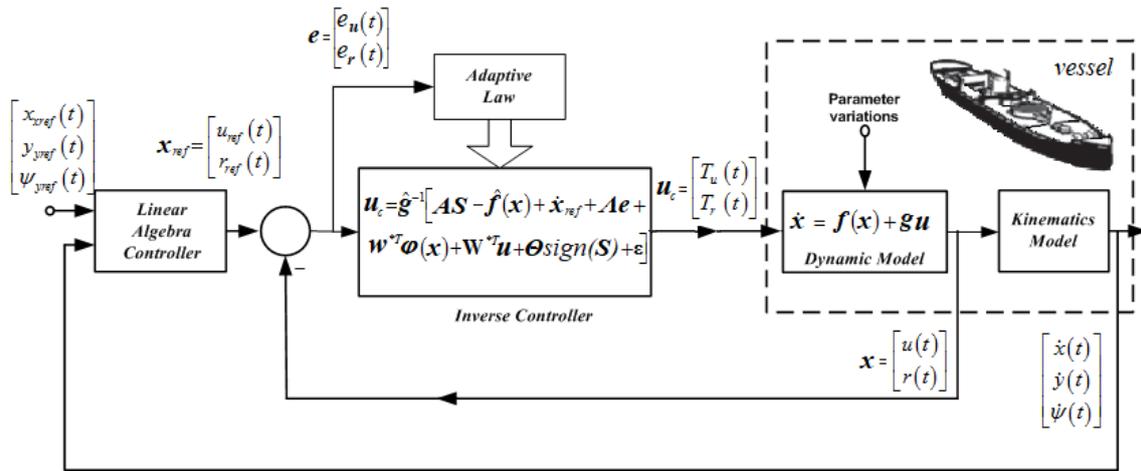


figura 4-2:estructura de control

#### 4.5. Resultados de Simulación Y Discusión

En esta sección se muestra el desempeño del sistema propuesto frente a perturbaciones ambientales. El objetivo es validar los resultados teóricos, para ello se realizan pruebas de simulación en condiciones de funcionamiento realistas considerando dos de los más comunes factores que influyen en la navegación, las olas y el viento. El efecto de las olas se puede representar matemáticamente incorporando al modelo perturbación  $\delta_{wa}$  que se muestra en figura 4-3 según (4-60) [71], [47]. El efecto del viento ( $\delta_{wi}$ ) se puede representar introduciendo una perturbación en las velocidades lineales y transversales [72]. Por lo tanto, la perturbación  $\delta_{wi}$  que se muestra en figura 4-4 se agrega en el modelo a las variables  $u$  y  $v$ .

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= u \cos(\psi) - v \sin(\psi) + \delta_{wa} \\
 \dot{y} &= u \sin(\psi) + v \cos(\psi) + \delta_{wa} \\
 \dot{\psi} &= r
 \end{aligned}
 \tag{4-60}$$

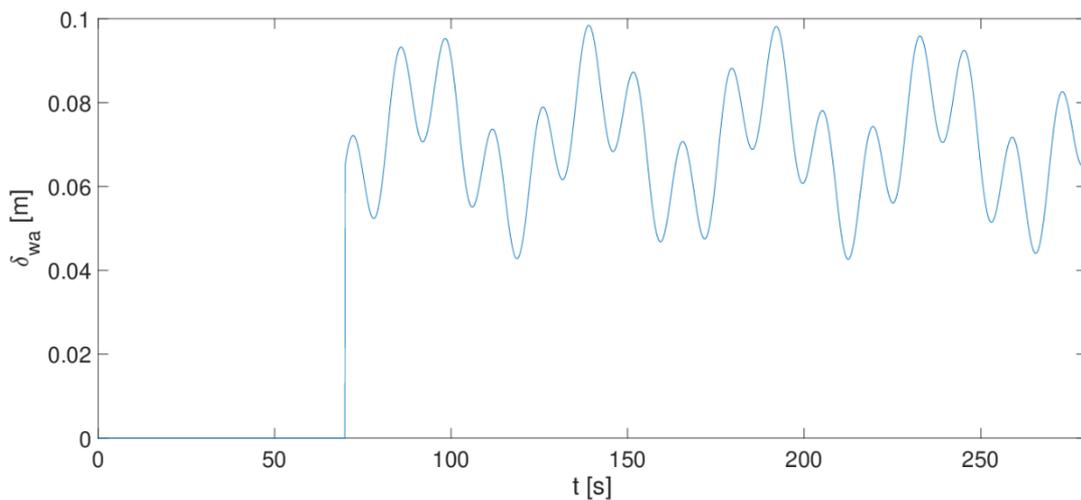


figura 4-3: Perturbaciones ambientales representando el efecto de olas

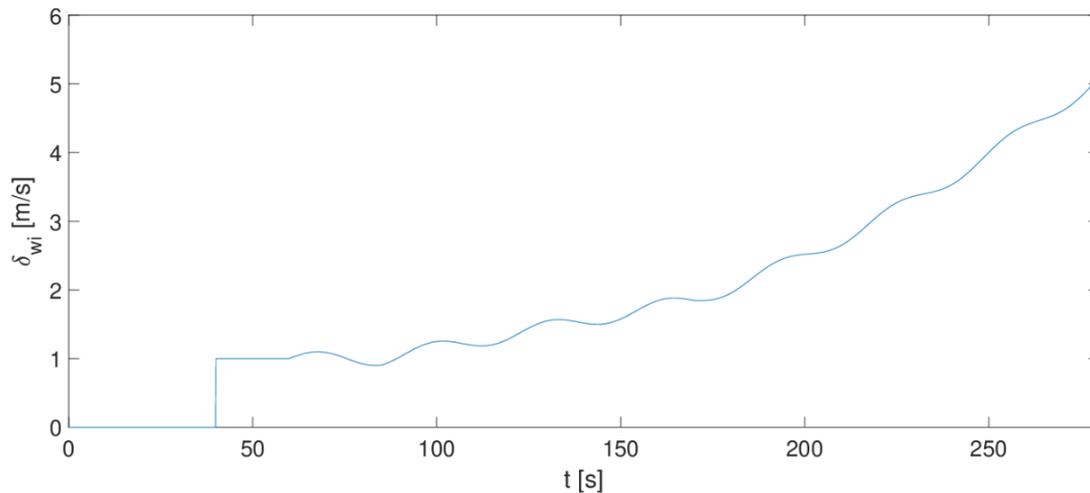


figura 4-4: Perturbaciones ambientales representando el efecto del viento

Como se puede observar en la figura el planificador global envía la trayectoria de referencia al sistema de control, en la primera etapa el controlador calcula las velocidades de referencia  $u_{ref}$  y  $r_{ref}$  y se las envía a la segunda etapa denominada controlador dinámico. Este controlador se encarga de calcular los momentos que deben aplicarse al buque  $T_u$  y  $T_r$ . El controlador es realimentado desde el barco con los valores actuales de las variables de estado.

Para poder desarrollar las simulaciones de forma adecuada se ha desarrollado el modelo en tiempo continuo del buque marino (II) en la plataforma de MatLab Simulink.

Los parámetros del controlador adoptados para las simulaciones realizadas son elegidos de forma empírica. Los parámetros de ajuste del controlador cinemático se eligen para que la corrección del error de seguimiento de la etapa cinemática sea suave y de esta manera evitar movimientos bruscos de la nave. Para conseguir esta corrección suave los parámetros del controlador cinemático deben ser inferiores

pero cercanos a uno (ver [44]). para el controlador cinemático se adoptó:  $(k_x, k_y, k_\psi) = (0.97, 0.97, 0.9)$ , mientras que para el controlador dinámico se eligió:  $(b_1, b_2, b_3, b_4) = (0.15, 0.15, 0.9, 0.9) = (0:15; 0:15; 0:9; 0:9)$ . Los parámetros del buque marino se adoptaron como en [29]:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M} &= \begin{bmatrix} 25,8 & 0 & 0 \\ 0 & 33,8 & 1,01 \\ 0 & 1,01 & 6,813 \end{bmatrix}; \\
 \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -2,5425 \\ 0 & -2,5425 & 1,422 \end{bmatrix}; \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4-61}$$

Con el objetivo de comparar el desempeño del sistema propuesto, de ahora en adelante se llamará **C1**, con otros controladores de la bibliografía dos sistemas presentados por otros autores se implementaron. En primer lugar, se implementó el controlador basado en álgebra lineal propuesto en [29], de ahora en adelante se llamará **C2**; y en segundo lugar el controlador propuesto en [28], de ahora en adelante **C3**.

Además, con el objetivo de analizar el desempeño de la red neuronal se implementó el controlador de dinámica inversa sin compensación de la red neuronal, este controlador se llamará **C4** de aquí en adelante. Para cuantificar el desempeño de los sistemas implementados se calculó la integral del error absoluto (índice **IAE**) según (4-62).

$$IAE = \int_0^{t_{sim}} \sqrt{e_x^2(t) + e_y^2(t)} dt \quad (4-62)$$

#### 4.5.1. Seguimiento de trayectoria de filas

Primero una ruta en forma de filas se adoptará como trayectoria referencia. Este tipo de recorrido resulta de gran utilidad para abordar tareas de inspección o vigilancia. La trayectoria es desarrollada con velocidad lineal constante  $u_{ref} = 0,25m/s$ , la posición inicial del buque es en el origen de coordenadas  $(x(0); y(0)) = (0m; 0m)$  y la trayectoria de referencia comienza en  $(x(0); y(0)) = (3m; 3m)$ . El tiempo de muestreo seleccionado es  $T_s = 0,1seg$ . Las perturbaciones  $\delta_{wa}$  y  $\delta_{wi}$  se incorporan de acuerdo a las Fig. 3 y 4.

Los resultados de simulación se muestran en la Fig. 5. Como se puede ver todos los controladores alcanzan y siguen la trayectoria de referencia. Sin embargo, el mejor desempeño es logrado por el controlador **C1** propuesto en este trabajo.

El seguimiento de los valores de referencia de las variables de estado  $x$  e  $y$  a medida que transcurre el tiempo se muestra en las Fig. 6(a) y 6(b). Es importante notar que el controlador **C1** realiza un seguimiento con un bajo error y además sin oscilaciones en sus movimientos en comparación

con los otros controladores implementados cuando aparecen las perturbaciones ambientales. Como se observa mediante la inspección de las Fig. 6(c) y 6(d). Las acciones de control del controlador propuesto (**C1**) se muestran en la figura Fig. 7.

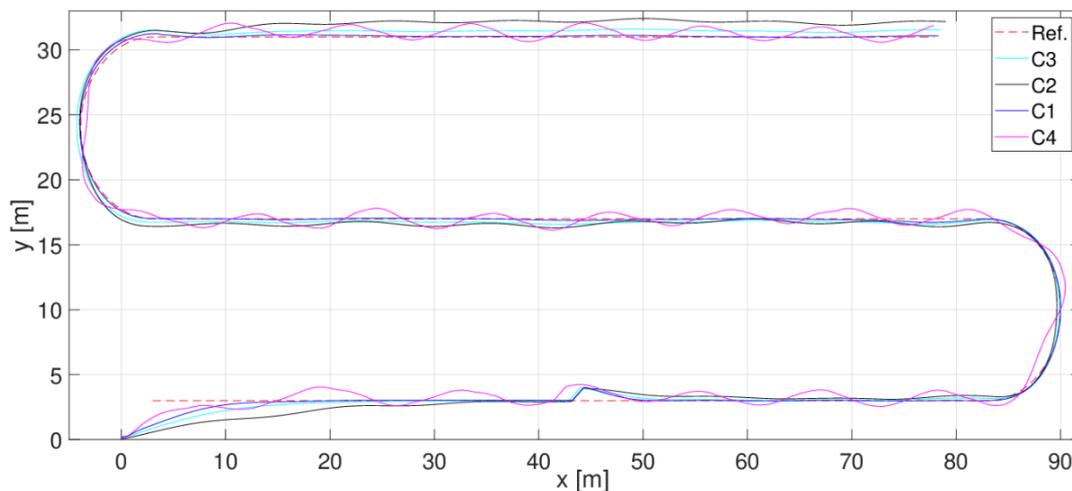


figura 4-5: Posición del buque marino para cada uno de los controladores implementados.

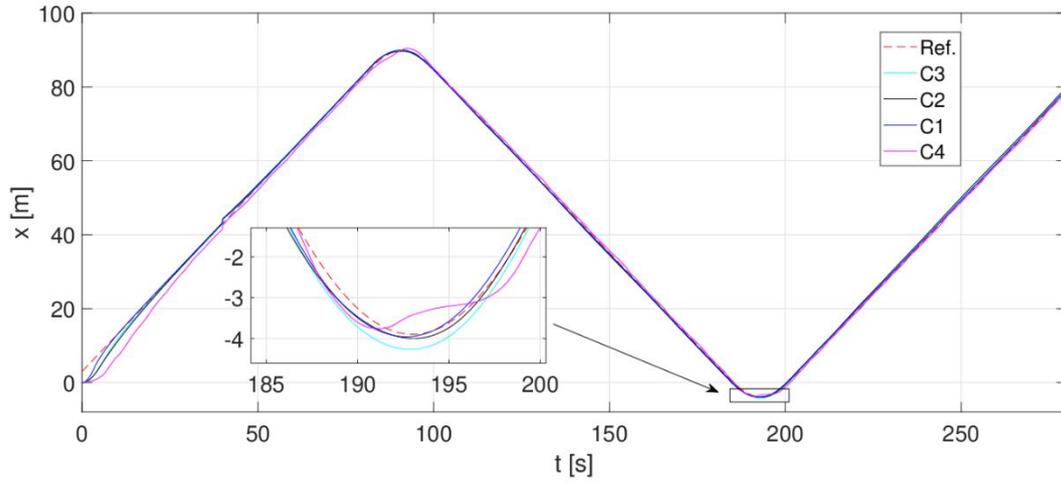


figura 4-6: Posición en x del buque marino vs. Tiempo

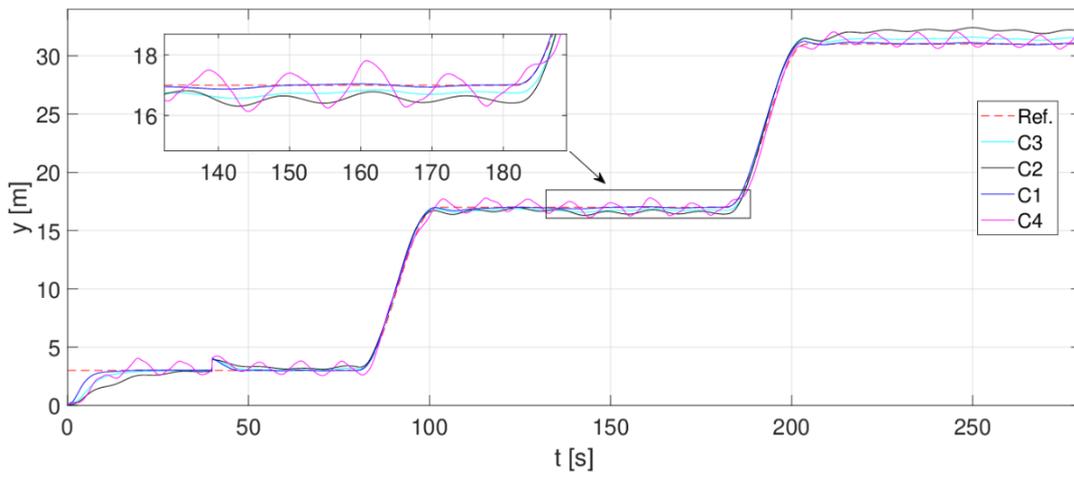


figura 4-7: Posición en el eje y del buque marino vs. tiempo

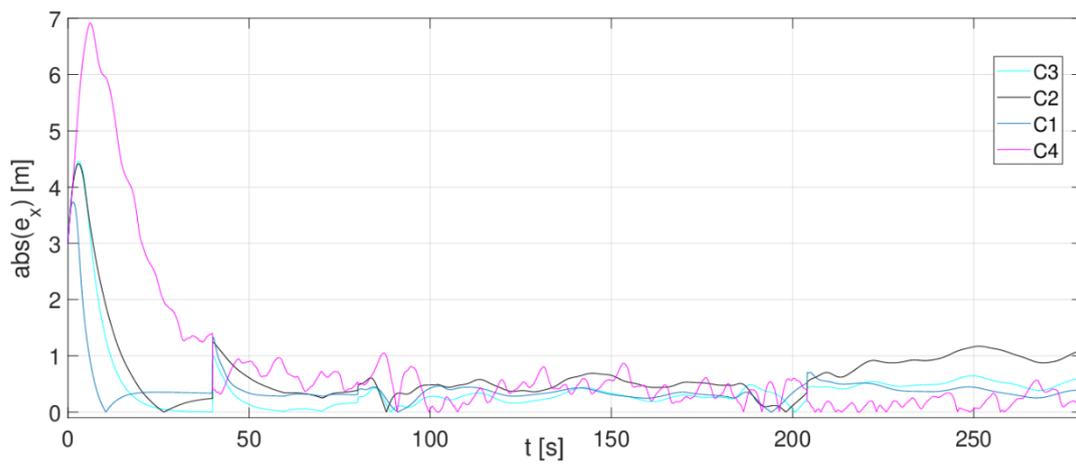


figura 4-8: Evolución del valor absoluto del error en x vs. tiempo

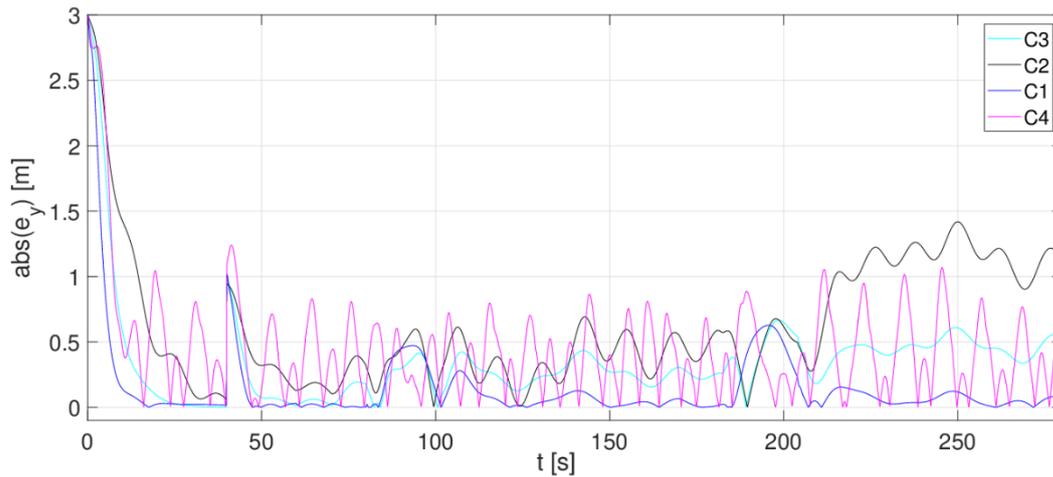


figura 4-9: Evolución del valor absoluto del error en y vs. tiempo

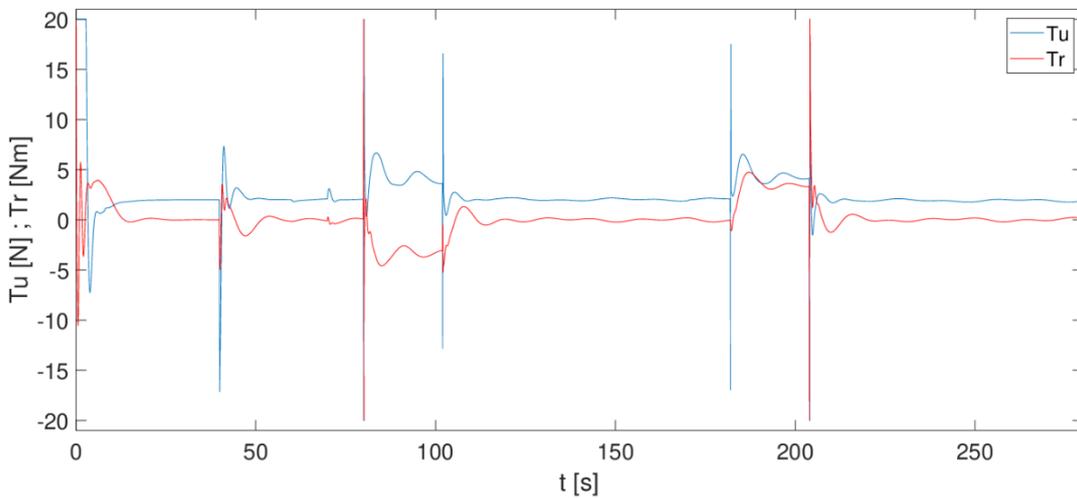


figura 4-10: Acciones de control del controlador propuesto (C1) vs. tiempo.

#### 4.5.2. Discusión de resultados

En esta propuesta de control para buques marinos, se utiliza una técnica de control combinada de un controlador cinemático basada en álgebra lineal y un controlador para la parte dinámica basado en redes neuronales. El enfoque propuesto resulta de gran utilidad especialmente en buques mercantes donde la variación de la carga y su gran volumen lo hacen vulnerable a las contingencias climáticas (viento, olas, tormentas, etc.). Observe al comparar los resultados de **C1** y **C4** que el efecto de las perturbaciones en el seguimiento se reduce notablemente al compensar con la red neuronal. En los experimentos realizados se puede observar que el sistema propuesto (**C1**) es más eficiente al momento de rechazar las perturbaciones externas que pueden alterar su dinámica.

La Tabla 4-1 muestra los valores de **IAE** obtenidos para el controlador en la simulación realizada. De esta tabla se observa que al cuantificar los resultados utilizando el índice antes mencionado el desempeño logrado por **C1** es superior a los alcanzados por **C2** y **C3**. Esta técnica podría aplicarse en diferentes tipos de barcos debido a su simplicidad y robustez.

<b>Controlador/Resultados</b>	<b>Trayectoria filas</b>
<i>C1</i>	<i>IAE=57,34</i>
<i>C2</i>	<i>IAE=65,36</i>
<i>C3</i>	<i>IAE=63,07</i>
<i>C4</i>	<i>IAE=85,24</i>

Tabla 4-1: Resumen de las simulaciones del Experimento

#### 4.6. Observaciones finales

En este trabajo, se diseñó y probó completamente un controlador adaptable para un buque marino en seguimiento de trayectorias. Dicho controlador se dividió en dos partes, las que se basan en la cinemática (álgebra lineal) y el modelo dinámico de la embarcación (control neuro-adaptable). El modelo considerado tomó el par de velocidades (lineal y angular) como señales de referencia de entrada. Se consideró una ley de ajuste de parámetros para el controlador neuro-adaptable que actúa sobre la parte dinámica de la embarcación marina, donde esta acción mejora el rendimiento del sistema disminuyendo el error de control.

El análisis de estabilidad se realizó utilizando la teoría de Lyapunov, sobre el sistema de control algebra lineal - neuro-adaptables. De donde se obtuvo una ley de ajuste de parámetros neuronales los cuales minimizan el error de control del sistema. En este trabajo también se muestra resultados de simulación realistas que indican el buen desempeño de la técnica de control propuesta para el seguimiento de trayectorias aplicado en una embarcación marina.

Los resultados demostraron que la técnica de control propuesta es capaz de seguir una trayectoria deseada con un mínimo error cuando el controlador ajusta los parámetros en diferentes condiciones de operación. La importancia de este ajuste en línea se ilustra para los casos en que la dinámica de los navíos no se conoce exactamente o podrían cambiar debido a las variaciones de masa. Siendo una posible aplicación en el caso de buques mercantes marinos utilizados para el transporte de carga, ya que este ajuste mantendría un error de seguimiento mínimo, incluso en el caso de cambios importantes en la dinámica del buque.

## Capítulo 5. Control adaptable para seguimiento de trayectorias en Cuadricópteros con perturbaciones mediante el uso de Redes neuronales de regresión generalizada.

### 5.1. Resumen del Capitulo

En este capítulo se presenta el desarrollo y la validación experimental de un controlador no lineal con un sistema de compensación de perturbaciones adaptable aplicado a un cuadricóptero. El esquema introducido se basa en una red neuronal de regresión generalizada (GRNN). El esquema propuesto tiene una estructura que consiste en un lazo de control interno inaccesible para el usuario (es decir, un controlador embebido) y un lazo de control externo que genera comandos para el lazo de control interno. El GRNN adaptable se aplica en el bucle de control externo. El enfoque propuesto radica en la aptitud de la GRNN para estimar las perturbaciones y los efectos dinámicos no modelados sin requerir un conocimiento preciso de los parámetros del Cuadricóptero. Las leyes de adaptación se deducen a partir de un riguroso análisis de convergencia que garantiza el seguimiento asintótico de la trayectoria. El esquema de control propuesto se implementa en el Cuadricóptero QBall 2. Las comparaciones con respecto a un control basado en PD, un esquema adaptable basado en un modelo regresor y un controlador adaptable de red neural. En el final de este capítulo se presentan resultados experimentales que validan la funcionalidad del control y con un menor valor de error de seguimiento.

### 5.2. Modelo Dinámico del Cuadricóptero

El modelo dinámico de seis grados de libertad del Cuadricóptero representado en el marco de referencia inercial como se describe en [81], [82] viene dado por

$$m\ddot{\mathbf{p}} + mg\mathbf{e}_z + D_p(\boldsymbol{\eta})\dot{\mathbf{p}} = R(\boldsymbol{\eta})\mathbf{e}_z F \quad (5-1)$$

$$M(\boldsymbol{\eta})\ddot{\boldsymbol{\eta}} + C(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}})\dot{\boldsymbol{\eta}} + D_\eta(\boldsymbol{\eta})\dot{\boldsymbol{\eta}} = W(\boldsymbol{\eta})^{-T} \boldsymbol{\tau} \quad (5-2)$$

donde la ecuación (2-27) representa la dinámica de posición y la ecuación (2-17) representa la dinámica de actitud,  $m \in \mathbb{R}$  es la masa del vehículo,  $g \in \mathbb{R}$  es la constante de aceleración gravitatoria,  $\mathbf{p} = [x \ y \ z]^T \in \mathbb{R}^3$  es la posición del Cuadricóptero,  $\boldsymbol{\eta} = [\phi \ \theta \ \psi]^T \in \mathbb{R}^3$  es la actitud del Cuadricóptero, ambas expresadas en el sistema de referencia inercial,  $\mathbf{e}_z = [0 \ 0 \ 1]^T \in \mathbb{R}^3$  es un vector unitario a lo largo del eje z en el sistema de referencia inercial,  $D_p(\boldsymbol{\eta}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  es la matriz de resistencia aerodinámica,  $D_\eta(\boldsymbol{\eta}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  es una matriz definida positiva que modela un efecto de amortiguación aerodinámica,  $R(\boldsymbol{\eta}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  es una matriz de rotación,  $M(\boldsymbol{\eta}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  es la matriz de inercia,  $C(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  es la matriz de Coriolis,  $W(\boldsymbol{\eta}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  es una matriz de transformación,  $F \in \mathbb{R}$  y  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^3$  son las entradas de control.

El modelo de cuadricóptero en (2-27) y (2-17) no considera los efectos aerodinámicos que están presentes durante su funcionamiento en ambientes exteriores. Basándose en los trabajos anteriores [83]-[86], se pueden considerar muchos efectos aerodinámicos diferentes, como la influencia del ángulo de ataque de las palas de las hélices en el empuje proporcionado por los actuadores o la resistencia inducida por el viento.

Los efectos aerodinámicos son más significativos en los vuelos de alta velocidad y en las maniobras acrobáticas. Los efectos aerodinámicos considerados en este trabajo son la

fuerza resultante de la resistencia inducida por el viento, representada en el lado izquierdo de la ecuación (2-27) por la expresión  $D_p(\boldsymbol{\eta})\dot{\mathbf{p}}$ , y el par de resistencia aerodinámica, representado en el lado izquierdo de la ecuación (2-17) por el término  $D_\eta(\boldsymbol{\eta})\dot{\boldsymbol{\eta}}$ .

Teniendo en cuenta las ideas discutidas en [87]-[90], vamos a suponer que hay un controlador interno embebido capaz de estabilizar el Cuadricóptero en vuelo estacionario. En los trabajos [87]-[90], se supone que el controlador embebido está dado por

$$F = \frac{m}{c_\phi c_\theta} (g + \dot{z}^*) \quad (5-3)$$

$$\boldsymbol{\tau} = W(\boldsymbol{\eta})^T [M(\boldsymbol{\eta})\tilde{\boldsymbol{\tau}} + C(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}})\dot{\boldsymbol{\eta}}] \quad (5-4)$$

Donde la señales

$$\dot{z}^* = \frac{1}{\tau_z} (\dot{z}_d - \dot{z}) \quad (5-5)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\tau}_\phi \\ \tilde{\tau}_\theta \\ \tilde{\tau}_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_\phi^2 (\phi_d - \phi) - 2\xi_\phi \omega_\phi \dot{\phi} \\ \omega_\theta^2 (\theta_d - \theta) - 2\xi_\theta \omega_\theta \dot{\theta} \\ \frac{1}{\tau_\psi} (\dot{\psi}_d - \dot{\psi}) \end{bmatrix} \quad (5-6)$$

están relacionadas con los sistemas lineales de primer y segundo orden como se verá más adelante, donde  $\omega_\phi$  y  $\omega_\theta$  son las frecuencias naturales,  $\xi_\phi$  y  $\xi_\theta$  son las constantes de amortiguamiento, y  $\tau_z$  y  $\tau_\psi$  son las constantes de tiempo para cada sistema.

Obsérvese que las señales de referencia  $\dot{z}_d$ ,  $\phi_d$ ,  $\theta_d$ , y  $\dot{\psi}_d$  son los comandos de entrada para el controlador interno embebido. Consideremos que los comandos de entrada para el controlador embebido satisfacen  $|\dot{z}_d| \leq \dot{z}_{max}$ ,  $|\phi_d| \leq \phi_{max}$ ,  $|\theta_d| \leq \theta_{max}$ ,  $|\dot{\psi}_d| \leq \dot{\psi}_{max}$ .

A continuación, se establecen las siguientes relaciones

$$\dot{z}_d = \dot{z}_{max} u_z \quad (5-7)$$

$$\phi_d = \phi_{max} u_\phi \quad (5-8)$$

$$\theta_d = \theta_{max} u_\theta \quad (5-9)$$

$$\dot{\psi}_d = \dot{\psi}_{max} u_\psi \quad (5-10)$$

donde  $\mathbf{u} = [u_\phi \ u_\theta \ u_z \ u_\psi]^T \in \mathbb{R}^4$  es el vector de entrada de control adimensional y normalizado, siendo  $u_\phi$  una entrada de control de posición angular relacionada con el desplazamiento a lo largo del eje x,  $u_\theta$  una entrada de control de posición angular relacionada con el desplazamiento a lo largo del eje y,  $u_z$  una entrada de control de velocidad relacionada con el desplazamiento a lo largo del eje z, y  $u_\psi$  una entrada de control de velocidad angular relacionada con la rotación alrededor del eje z, todo ello en el sistema de referencia inercial.

Sustituyendo las expresiones (5-7)-(5-10) en las ecuaciones (5-5) y (5-6), se obtiene lo siguiente se obtiene lo siguiente:

$$\dot{z}^* = \frac{\dot{z}_{max}u_z}{\tau_z} - \frac{\dot{z}}{\tau_z},$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\tau}_\phi \\ \tilde{\tau}_\theta \\ \tilde{\tau}_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_\phi^2 \phi_{max} u_\phi - 2\xi_\phi \omega_\phi \dot{\phi} - 2\omega_\phi^2 \phi \\ \omega_\theta^2 \theta_{max} u_\theta - 2\xi_\theta \omega_\theta \dot{\theta} - 2\omega_\theta^2 \theta \\ \frac{\dot{\psi}_{max} u_\psi}{\tau_\psi} - \frac{1}{\tau_\psi} \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

Así, sustituyendo las ecuaciones (5-3)- (5-10) en las ecuaciones (2-27) y (2-17), el sistema de lazo cerrado resultante de la dinámica del Cuadricóptero y del controlador incorporado (también llamado lazo de control interno) es

$$\ddot{x} = \frac{F}{m} (s_\psi s_\phi + c_\psi c_\phi s_\theta) - d_x \dot{x} \quad (5-11)$$

$$\ddot{y} = \frac{F}{m} (-c_\psi s_\phi + s_\psi c_\phi s_\theta) - d_y \dot{y} \quad (5-12)$$

$$\ddot{z} = \frac{\dot{z}_{max}u_z}{\tau_z} - \left( \frac{1}{\tau_z} + d_z \right) \dot{z}$$

$$\ddot{\phi} = \omega_\phi^2 \phi_{max} u_\phi - (2\xi_\phi \omega_\phi + d_\phi) \dot{\phi} - 2\omega_\phi^2 \phi$$

$$\ddot{\theta} = \omega_\theta^2 \theta_{max} u_\theta - (2\xi_\theta \omega_\theta + d_\theta) \dot{\theta} - 2\omega_\theta^2 \theta$$

$$\ddot{\psi} = \frac{\dot{\psi}_{max} u_\psi}{\tau_\psi} - \left( \frac{1}{\tau_\psi} + d_\psi \right) \dot{\psi}$$

donde las hipótesis  $mD_p(\boldsymbol{\eta}) \approx \text{diag}\{d_x, d_y, d_z\}$  y  $M(\boldsymbol{\eta})^{-1} - D_\eta(\boldsymbol{\eta}) \approx \text{diag}\{d_\phi, d_\theta, d_\psi\}$  fueron utilizadas.

Linealizando las ecuaciones (5-11) y (5-12) en torno al punto de operación  $\psi = \text{constante}$ ,  $\theta = \phi = 0$  y  $F = mg$  correspondiente al vuelo estacionario, se obtienen las expresiones (5-13) y (5-14) que denotan la relación de la dinámica de posición en el plano horizontal con la actitud.

$$\ddot{x} = g(s_\psi \theta + s_\psi \phi) - d_x \dot{x} \quad (5-13)$$

$$\ddot{y} = g(c_\psi \theta - c_\psi \phi) - d_y \dot{y} \quad (5-14)$$

Las expresiones (5-13) y (5-14) denotan la relación de la dinámica de posición en el plano horizontal con la actitud. Sumando y restando  $g(s_\psi \theta_d + s_\psi \phi_d)$  y  $g(c_\psi \theta_d - c_\psi \phi_d)$  a las ecuaciones (5-13) y (5-14), respectivamente, y definiendo el error de actitud para los ángulos de cabeceo y balanceo como

$$\tilde{\theta} = \theta_d - \theta$$

$$\tilde{\phi} = \phi_d - \phi$$

y realizando algunas manipulaciones algebraicas, la dinámica del Cuadricóptero bajo el controlador embebido (5-3)-(5-4) y (5-7)-(5-10) se expresa como

$$\ddot{x} = c_\psi g \theta_{max} u_\theta + s_\psi \phi_{max} u_\phi - d_x \dot{x} + g(c_\psi \tilde{\theta} + s_\psi \tilde{\phi}) \quad (5-15)$$

$$\ddot{y} = s_\psi g \theta_{max} u_\theta - c_\psi \phi_{max} u_\phi - d_y \dot{y} + g(s_\psi \tilde{\theta} - c_\psi \tilde{\phi}) \quad (5-16)$$

$$\ddot{z} = \frac{\dot{z}_{max} u_z}{\tau_z} - \left( \frac{1}{\tau_z} + d_z \right) \dot{z} \quad (5-17)$$

$$\ddot{\phi} = -(2\xi_\phi \omega_\phi + d_\phi) \dot{\phi} + \omega_\phi^2 \tilde{\phi} \quad (5-18)$$

$$\ddot{\theta} = -(2\xi_\theta \omega_\theta + d_\theta) \dot{\theta} + \omega_\theta^2 \tilde{\theta} \quad (5-19)$$

$$\ddot{\psi} = \frac{\dot{\psi}_{max} u_\psi}{\tau_\psi} - \left( \frac{1}{\tau_\psi} + d_\psi \right) \dot{\psi} \quad (5-20)$$

Bajo el supuesto de que el controlador interno embebido (5-4) estabiliza el Cuadricóptero de forma que  $\tilde{\theta}(t) \approx 0$  y  $\tilde{\phi}(t) \approx 0$  para todo  $t \geq 0$ , el sistema en (5-15)-(5-17), (5-20) puede escribirse en forma matricial como en [26],[76], [78], [79], [80], [91]-[93],[96]

$$\ddot{\mathbf{x}}^w = \mathbf{T}(\psi) \mathbf{K}_u (\mathbf{x}^w, \dot{\mathbf{x}}^w) \mathbf{u} - \mathbf{K}_v \dot{\mathbf{x}}^w \quad (5-21)$$

donde  $\mathbf{x}^w = [x \ y \ z \ \psi]^T \in \mathbb{R}^4$  es el vector que contiene la posición  $(x, y, z)$  y el ángulo de guiñada  $\psi$  con respecto al sistema de referencia inercial (el superíndice  $w$  indica la relación con el sistema de referencia inercial),  $\mathbf{K}_u \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  y  $\mathbf{K}_v \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  son matrices diagonales positivas definidas relacionadas con los parámetros del vehículo y el controlador embebido dado explícitamente como

$$\mathbf{K}_u = \begin{bmatrix} g\theta_{max} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g\phi_{max} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\dot{z}_{max}}{\tau_z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\dot{\psi}_{max}}{\tau_\psi} \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{K}_v = \begin{bmatrix} d_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left( \frac{1}{\tau_z} + d_z \right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left( \frac{1}{\tau_\psi} + d_\psi \right) \end{bmatrix}$$

La matriz  $\mathbf{T}(\psi) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  es una matriz de transformación dada por

$$\mathbf{T}(\psi) = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & \text{sen}(\psi) & 0 & 0 \\ \text{sen}(\psi) & -\cos(\psi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El vector

$$\mathbf{u} = [u_\phi \ u_\theta \ u_z \ u_{\dot{\psi}}]^T \quad (5-22)$$

es el vector de entrada de control para el bucle de control interno donde:

$u_\phi$  es la entrada de control de la posición angular relacionada con el desplazamiento a lo largo del eje x.

$u_\theta$  es la entrada de control de posición angular relacionada con el desplazamiento a lo largo del eje y.

$u_z$  es la entrada de control de velocidad relacionada con el desplazamiento a lo largo del eje z.

$u_{\dot{\psi}}$  es la entrada de control de la velocidad angular relacionada con la rotación alrededor del eje z.

Como se ha mencionado anteriormente, el sistema de ecuaciones no lineales expresado en (5-21) forma parte del sistema de lazo cerrado resultante de la dinámica del Cuadricóptero (2-27)-(2-17) y del controlador embebido inaccesible para el usuario (5-3)-(5-4). Sin embargo, el sistema en (5-21) puede ser asumido como el modelo del Cuadricóptero ya que los parámetros del controlador embebido no pueden ser modificados, lo que motiva el diseño de un lazo de control externo. En algunas aplicaciones del Cuadricóptero, los parámetros del modelo pueden cambiar como consecuencia de las condiciones meteorológicas (ráfagas de viento, lluvia, cambios en la densidad del aire, etc.), o de la tarea a realizar, como el transporte de la carga útil suspendida en un cable. Debido a lo anterior, el sistema en (5-21) puede expresarse de forma similar a [94], [95], resultando la siguiente representación de entrada-salida,

$$\dot{\mathbf{x}}^w = \mathbf{T}(\psi)\mathbf{K}_u(\mathbf{x}^w, \dot{\mathbf{x}}^w)\mathbf{u} + \boldsymbol{\delta}(t) \quad (5-23)$$

donde el término  $-\mathbf{K}_v\dot{\mathbf{x}}^w$  del modelo de (5-21) está contenido en  $\boldsymbol{\delta}(t) \in \mathbb{R}^4$ , que representa el vector de perturbaciones, el cual es acotado por una cte:

$$\|\boldsymbol{\delta}(t)\| \leq \delta_0, \forall \begin{bmatrix} \mathbf{x}^w \\ \dot{\mathbf{x}}^w \end{bmatrix} \in \boldsymbol{\Omega}$$

donde  $\delta_0$  es una constante estrictamente positiva y  $\boldsymbol{\Omega}$  es un conjunto compacto.

Para asegurar el control de seguimiento de la trayectoria del sistema (5-23), debe diseñarse un esquema externo  $\mathbf{u}$  para suministrar comandos de posición y velocidad al controlador interno. Por lo tanto, uno de los propósitos de este trabajo de investigación es introducir un controlador externo adaptativo GRNN  $\mathbf{u}$  para el sistema (5-23). Desde la definición de  $\mathbf{u}$  en (5-22), se puede pensar que en realidad el lazo de control externo es una etapa de planificación de la trayectoria en tiempo real.

### 5.3. Controlador para rechazo de perturbaciones (bucle de control externo)

El controlador propuesto está compuesto por una GRNN adaptativa, un término discontinuo de pequeña ganancia utilizado para eliminar el error de aproximación de la red neuronal, y un término no lineal continuo que puede mejorar la tasa de convergencia del error de seguimiento. Considerando  $\mathbf{x}_d^w = [x_d, y_d, z_d, \psi_d]^T \in \mathbb{R}^4$  como la posición deseada y el vector de ángulo de guiñada, el error de seguimiento generalizado se define como

$$\mathbf{e} = \mathbf{x}^w - \mathbf{x}_d^w \quad (5-24)$$

De forma similar a [97], se propone una superficie de deslizamiento para un sistema MIMO de la siguiente manera:

$$\dot{\mathbf{S}} = \ddot{\mathbf{e}} + \boldsymbol{\alpha}\dot{\mathbf{e}} \quad (5-25)$$

donde  $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  es una matriz de ganancia diagonal positiva definida. Diferenciando la ecuación (5-25) con respecto al tiempo, conduce a

$$\dot{\mathbf{S}} = \ddot{\mathbf{e}} + \boldsymbol{\alpha}\dot{\mathbf{e}} \quad (5-26)$$

Sustituyendo el error de seguimiento (5-24) en (5-26) obtenemos:

$$\ddot{\mathbf{x}}^w - \ddot{\mathbf{x}}_d^w = \dot{\mathbf{S}} - \boldsymbol{\alpha}\dot{\mathbf{e}} \quad (5-27)$$

Ahora, sustituyendo la ecuación (5-25) en (5-27) y reordenando, obtenemos

$$\ddot{\mathbf{x}}^w = \dot{\mathbf{S}} - \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{S} - \boldsymbol{\alpha}\mathbf{e}) + \ddot{\mathbf{x}}_d^w = \dot{\mathbf{S}} - \boldsymbol{\alpha}\mathbf{S} + \boldsymbol{\alpha}^2\mathbf{e} + \ddot{\mathbf{x}}_d^w \quad (5-28)$$

Entonces, sustituyendo la ecuación (5-28) en el modelo dinámico del Cuadricóptero en (5-23) y despejando  $\dot{\mathbf{r}}$ , tenemos

$$\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{T}(\boldsymbol{\psi})\mathbf{K}_u(\mathbf{x}^w, \dot{\mathbf{x}}^w)\mathbf{u} + \boldsymbol{\delta}(t) + \boldsymbol{\alpha}\mathbf{S} - \boldsymbol{\alpha}^2\mathbf{e} - \ddot{\mathbf{x}}_d^w \quad (5-29)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (5-29), se propone el siguiente controlador

$$\mathbf{u} = (\mathbf{T}(\boldsymbol{\psi})\mathbf{K}_u)^{-1} \left( \ddot{\mathbf{x}}_d^w - b_1 \tanh(b_2 \mathbf{S}) - \widehat{\boldsymbol{\delta}}(t) - \boldsymbol{\Gamma} \text{sign}(\mathbf{S}) \right) \quad (5-30)$$

donde  $\text{sign}(\mathbf{S}) = [\text{sign}(S_1), \text{sign}(S_2), \text{sign}(S_3), \text{sign}(S_4)]^T \in \mathbb{R}^4$ , siendo la función  $\text{sign}(\cdot)$  la siguiente:

$$\text{sign}(\varrho) = \begin{cases} -1, \varrho < 0 \\ 0, \varrho = 0 \\ 1, \varrho > 0 \end{cases}$$

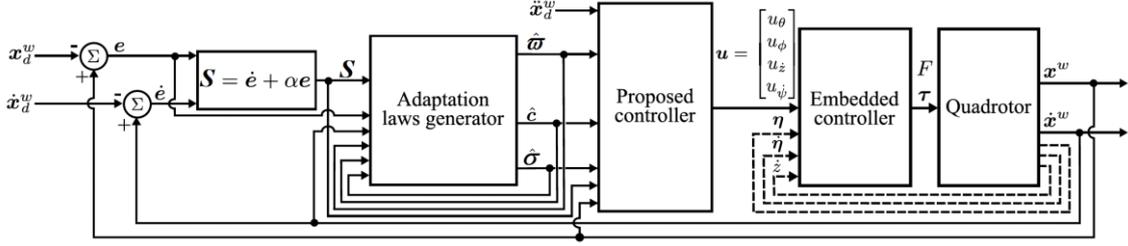


figura 5-1: Diagrama en bloques del control basado en GRNN en (30).

$\tanh(b_2\mathbf{S}) = [\tanh(b_2S_1), \tanh(b_2S_2), \tanh(b_2S_3), \tanh(b_2S_4)]^T \in \mathbb{R}^4$ ,  $b_1$  y  $b_2$  son constantes estrictamente positivas,  $K_r \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  es una matriz diagonal de ganancia definida positiva y  $\widehat{\boldsymbol{\delta}}(t) \in \mathbb{R}^4$  es una estimación de la perturbación  $\boldsymbol{\delta}(t) \in \mathbb{R}^4$  producida por las condiciones ambientales, la variación de la carga útil y la dinámica no modelada que actúan sobre el sistema.

El término  $b_1 \tanh(b_2\mathbf{S})$  se utiliza como función de saturación suave para acotar la acción de control evitando valores elevados que podrían desestabilizar el Cuadricóptero. Esta estrategia es útil especialmente para la implementación experimental y durante el proceso de ajuste. El término  $b_1 \tanh(b_2\mathbf{S})$  fue utilizado de forma similar en [97]. Cabe destacar que el término  $b_1 \tanh(b_2\mathbf{S})$  podría ser sustituido por  $b_1\mathbf{S}$  y el objetivo de control se seguirá garantizando mediante el uso de una función  $V$  definida positiva adecuada y las condiciones correspondientes.

En la figura 5-1 se presenta el diagrama de bloques del sistema de lazo cerrado con el esquema de control propuesto y el controlador incorporado.

Obsérvese que la selección de la superficie de deslizamiento involucrada en los términos discontinuos del controlador (5-30) corresponde a una combinación lineal de los errores de posición y velocidad,  $\mathbf{e}$  y  $\dot{\mathbf{e}}$ , respectivamente, como se hace en muchos otros diseños en la literatura.

Ahora, el sistema de lazo cerrado que se obtiene sustituyendo (5-30) en (5-29) viene dado por:

$$\dot{\mathbf{S}} = b_1 \tanh(b_2\mathbf{S}) + (\boldsymbol{\delta}(t) - \widehat{\boldsymbol{\delta}}(t)) + \boldsymbol{\alpha}\mathbf{S} - \boldsymbol{\alpha}^2\mathbf{e} - \boldsymbol{\Gamma}\text{sign}(\mathbf{S}) \quad (5-31)$$

Hay que tener en cuenta que la señal  $\boldsymbol{\delta}(t)$  puede ser expresada por una GRNN, que de acuerdo con el teorema de aproximación universal [98], [99], se utiliza para aproximar cualquier función continua de la siguiente manera

$$\|\boldsymbol{\delta}(t) - \boldsymbol{\omega}^{*T}\mathbf{H}(\bar{\mathbf{S}}, \mathbf{c}, \boldsymbol{\sigma})\| \leq \epsilon < \infty$$

O

$$\boldsymbol{\delta}(t) = \boldsymbol{\omega}^{*T}\mathbf{H}(\bar{\mathbf{S}}, \mathbf{c}, \boldsymbol{\sigma}) + \epsilon \quad (5-32)$$

donde  $\bar{\mathbf{S}} = [1, \mathbf{S}^T, \mathbf{e}^T, \dot{\mathbf{x}}^{wT}]^T \in \mathbb{R}^{13}$  es el vector de entrada extendido para la GRNN,  $\mathbf{H}(\bar{\mathbf{S}}, \mathbf{c}, \boldsymbol{\sigma}) \in \mathbb{R}^m$  es un vector de funciones de activación de base radial definido como

$$H_i(\bar{\mathbf{S}}, \mathbf{c}_i, \sigma_i) = \frac{\exp(-\|\bar{\mathbf{S}} - \mathbf{c}_i\|/2\sigma_i)}{\sum_{j=1}^m \exp(-\|\bar{\mathbf{S}} - \mathbf{c}_j\|/2\sigma_j)} \quad (5-33)$$

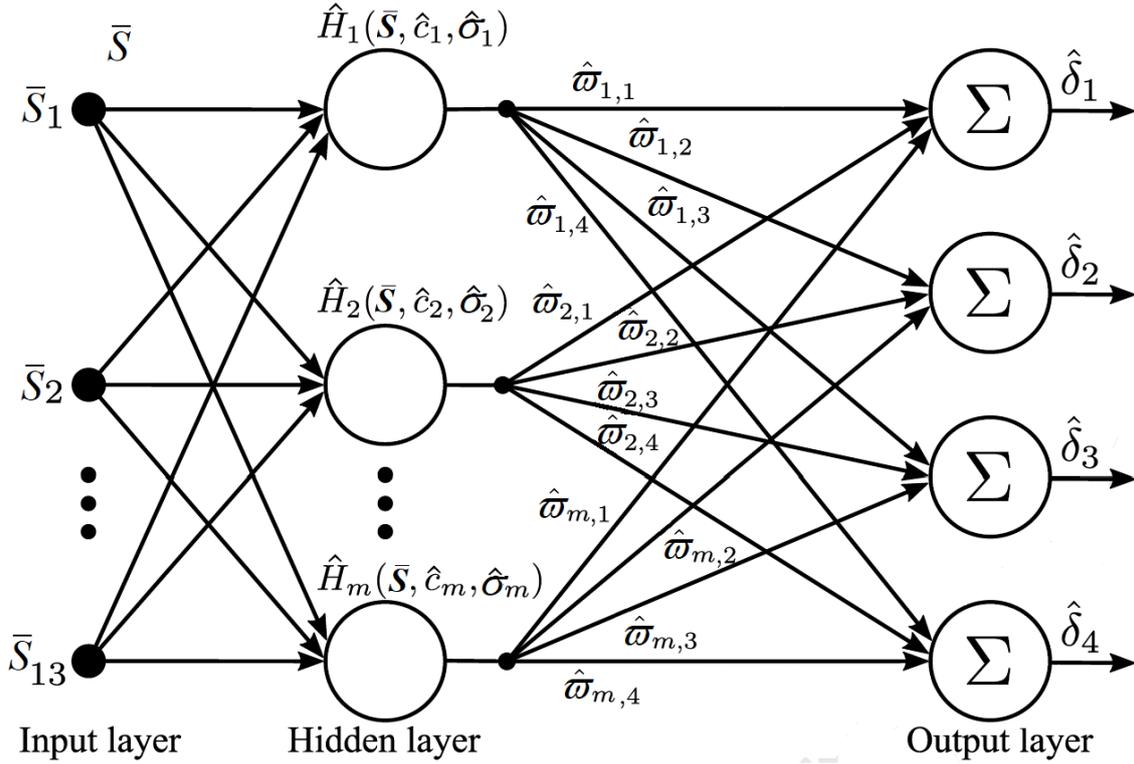


figura 5-2: Esquema de la red neuronal de regresión generalizada (GRNN) utilizada para obtener la estimación

donde  $m$  es el número de neuronas,  $\mathbf{c}_i \in \mathbb{R}^{13}$  es el vector de centros para cada elemento de  $\mathbf{H}(\bar{\mathbf{r}}, \mathbf{c}, \boldsymbol{\sigma})$ , el vector  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{13 \times m}$  es una concatenación vertical de los vectores  $c_i$  de forma que  $\mathbf{c} = [c_1^T, c_2^T, c_3^T, \dots, c_{13}^T]^T \in \mathbb{R}^{13}$ , mientras que  $\sigma_i \in \mathbb{R}$  es la desviación estándar de cada función de base radial  $H_i(\bar{\mathbf{S}}, \mathbf{c}_i, \sigma_i)$  en  $\mathbf{H}(\bar{\mathbf{S}}, \mathbf{c}, \boldsymbol{\sigma})$ . Así,  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R}^m$  es el vector de desviación estándar,  $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  es la matriz de parámetros óptimos, que es constante y desconocida, y  $n = 4$  es el número de salidas. El vector  $\boldsymbol{\epsilon} \in \mathbb{R}^4$  es el error de aproximación que está acotado como  $|\epsilon_i| \leq \Gamma_i$ . La matriz  $\boldsymbol{\Gamma} = \text{diag}\{\Gamma_i\}$  en la ley de control (6-27) ayuda a compensar los de aproximación. Basado en las discusiones en [61], [100], [103]-[106] la GRNN es una variación de la red neuronal de función de base radial con una estructura multicapa.

Está compuesta principalmente por cuatro capas: una capa de entrada, una capa oculta, una capa de suma y una capa de salida. Las funciones de base radial están contenidas en la capa oculta. En concreto, la GRNN es una variación de la RBFN porque utiliza una función gaussiana como función de activación. Pero, a diferencia de la clásica RBFNN, la función de activación de la GRNN está normalizada como se puede observar en la ecuación (2-84).

$$\hat{\boldsymbol{\delta}}(t) = \hat{\boldsymbol{\omega}}^T \hat{\mathbf{H}}(\bar{\mathbf{S}}, \hat{\mathbf{c}}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}) \quad (5-34)$$

En la figura 5-2, se representa un diagrama de la estructura de la GRNN en (5-34). Los errores de estimación de los parámetros se definen como

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}(t) = \boldsymbol{\omega} - \hat{\boldsymbol{\omega}}(t) \quad (5-35)$$

$$\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{c} - \hat{\mathbf{c}} \quad (5-36)$$

$$\tilde{\sigma}(t) = \sigma - \hat{\sigma}(t) \quad (5-37)$$

A partir de la ecuación (2-83), el vector de perturbaciones externas puede representarse como una función de los errores de estimación de los parámetros en (5-35), (5-36) y (5-37) como:

$$\begin{aligned} \delta(t) &= [\tilde{\omega}(t) + \hat{\omega}(t)]^T [\hat{H}(\bar{S}, \hat{c}, \hat{\sigma}) + \tilde{H}(\bar{S}, \tilde{c}, \tilde{\sigma})] + \epsilon = \dots \\ &= \tilde{\omega}^T(t) \hat{H}(\cdot) + \hat{\omega}^T(t) \tilde{H}(\cdot) + \hat{\omega}^T(t) \hat{H}(\cdot) + \hat{\omega}^T \tilde{H}(\cdot) + \epsilon \end{aligned} \quad (5-38)$$

Sustituyendo la función de estimación (5-34) en la ecuación (5-38) obtenemos

$$\delta(t) = \hat{\delta}(t) + \tilde{\omega}^T(t) \hat{H}(\cdot) + \tilde{\omega}^T(t) \tilde{H}(\cdot) + \hat{\omega}^T \tilde{H}(\cdot) + \epsilon \quad (5-39)$$

Definiendo el error de la función de estimación (5-34) como  $\tilde{\delta}(t) = \delta(t) - \hat{\delta}(t)$ , la ecuación (5-39) puede escribirse como

$$\tilde{\delta}(t) = \tilde{\omega}^T(t) \hat{H}(\cdot) + \hat{\omega}^T \tilde{H}(\cdot) + \tilde{\omega}^T(t) \tilde{H}(\cdot) + \epsilon \quad (5-40)$$

Ahora, linealizando la función  $\Phi^T H(\bar{S}, c, \sigma)$  alrededor del punto de operación  $c = \hat{c}, \sigma = \hat{\sigma}$  como

$$\begin{aligned} \Phi^T H(\bar{S}, c, \sigma) &= \Phi^T \hat{H}(\bar{S}, \hat{c}, \hat{\sigma}) + \left. \frac{\partial [\Phi^T H(\bar{S}, c, \sigma)]}{\partial c} \right|_{\substack{c=\hat{c} \\ \sigma=\hat{\sigma}}} (c - \hat{c}) + \dots \\ &\quad + \left. \frac{\partial [\Phi^T H(\bar{S}, c, \rho)]}{\partial \sigma} \right|_{\substack{c=\hat{c} \\ \sigma=\hat{\sigma}}} (\sigma - \hat{\sigma}) = \dots \\ \Phi^T H(\bar{S}, c, \sigma) &= \Phi^T H(\bar{S}, \hat{c}, \hat{\sigma}) + \Phi^T \left. \frac{\partial [H(\bar{S}, c, \sigma)]}{\partial c} \right|_{\substack{c=\hat{c} \\ \sigma=\hat{\sigma}}} (c - \hat{c}) + \dots \\ &\quad + \Phi^T \left. \frac{\partial [\Phi^T H(\bar{S}, c, \sigma)]}{\partial \sigma} \right|_{\substack{c=\hat{c} \\ \sigma=\hat{\sigma}}} (\sigma - \hat{\sigma}) \end{aligned} \quad (5-41)$$

que será útil. Las derivadas parciales de la función de activación en (2-84) con respecto a los vectores centro y desviación estándar en la ecuación (5-41) se redefinen para simplificar la notación como

$$\Delta H_c = \left. \frac{\partial [H(\bar{S}, c, \sigma)]}{\partial c} \right|_{\substack{c=\hat{c} \\ \sigma=\hat{\sigma}}} \quad (5-42)$$

$$\Delta H_\sigma = \left. \frac{\partial [H(\bar{S}, c, \sigma)]}{\partial \sigma} \right|_{\substack{c=\hat{c} \\ \sigma=\hat{\sigma}}} \quad (5-43)$$

donde  $\Delta H_c \in \mathbb{R}^{m \times [m \cdot \dim(\bar{r})]}$  y  $\Delta H_\sigma \in \mathbb{R}^{m \times m}$  son los jacobianos de la función de activación (2-84) con respecto al vector central  $c$  y al vector de desviación estándar  $\sigma$ , respectivamente, siendo  $m \cdot \dim(\bar{S})$  la multiplicación de  $m$  veces la dimensión del vector

$\bar{\mathbf{S}}$ . Entonces, reescribiendo y reordenando la ecuación (5-41) con las expresiones (5-42) y (5-43) obtenemos:

$$\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{H}(\bar{\mathbf{S}}, \mathbf{c}^*, \boldsymbol{\sigma}^*) - \boldsymbol{\omega}^T \hat{\mathbf{H}}(\bar{\mathbf{S}}, \hat{\mathbf{c}}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}) = \boldsymbol{\omega}^T \Delta \mathbf{H}_c (\mathbf{c} - \hat{\mathbf{c}}) + \boldsymbol{\omega}^T \Delta \mathbf{H}_\sigma (\boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}) \quad (5-44)$$

Así, el error de estimación de la función de activación (5-44) viene dado por

$$\tilde{\mathbf{H}}(\bar{\mathbf{S}}, \tilde{\mathbf{c}}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}) = \Delta \mathbf{H}_c \tilde{\mathbf{c}} + \Delta \mathbf{H}_\sigma \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \quad (5-45)$$

Sustituyendo la ecuación (5-45) en (5-40), y definiendo  $\bar{\boldsymbol{\epsilon}} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}^T \mathbf{H}(\bar{\mathbf{S}}, \tilde{\mathbf{c}}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}) + \boldsymbol{\epsilon}$ , el error de estimación de la perturbación se puede escribir como:

$$\tilde{\boldsymbol{\delta}}(t) = \tilde{\boldsymbol{\omega}}^T(t) \hat{\mathbf{H}}(\cdot) + \tilde{\boldsymbol{\omega}}^T(\Delta \mathbf{H}_c \tilde{\mathbf{c}} + \Delta \mathbf{H}_\sigma \tilde{\boldsymbol{\sigma}}) + \bar{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (5-46)$$

Sustituyendo (5-46) en la ecuación (5-31), el sistema de lazo cerrado se reescribe como

$$\dot{\mathbf{S}} = b_1 \tanh(b_2 \mathbf{S}) + \tilde{\boldsymbol{\omega}}^T(t) \hat{\mathbf{H}}(\cdot) + \tilde{\boldsymbol{\omega}}^T(\Delta \mathbf{H}_c \tilde{\mathbf{c}} + \Delta \mathbf{H}_\sigma \tilde{\boldsymbol{\sigma}}) + \bar{\boldsymbol{\epsilon}} + \boldsymbol{\alpha} \mathbf{S} - \boldsymbol{\alpha}^2 \mathbf{e} - \boldsymbol{\Gamma} \text{sign}(\mathbf{S}) \quad (5-47)$$

Además, las leyes de adaptación se definen como sigue:

$$\frac{d\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i}{dt} = -\frac{d\hat{\boldsymbol{\omega}}_i}{dt} = -b_3 \hat{\mathbf{H}}(\cdot) (\tanh(b_2 S_i)) \quad (5-48)$$

$$\frac{d\tilde{\mathbf{c}}}{dt} = -\frac{d\hat{\mathbf{c}}}{dt} = -b_4 \sum_i^n [\tanh(b_2 S_i) (\Delta \mathbf{H}_c^T \hat{\boldsymbol{\omega}}_i(t))] \quad (5-49)$$

$$\frac{d\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{dt} = -\frac{d\hat{\boldsymbol{\sigma}}}{dt} = -b_5 \sum_i^n [\tanh(b_2 S_i) (\mathbf{H}_\sigma^T \hat{\boldsymbol{\omega}}_i(t))] \quad (5-50)$$

donde  $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \in \mathbb{R}^m$  denota la  $i$ -ésima columna de la matriz  $\tilde{\boldsymbol{\omega}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Finalmente, el sistema global de lazo cerrado se expresa mediante las ecuaciones (5-26), (5-47), (5-48), (5-49) y (5-50).

Cabe destacar que los parámetros estimados de la red neuronal  $\hat{\boldsymbol{\omega}}_i$ ,  $\hat{\mathbf{c}}$  y  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$  se obtienen mediante las leyes de adaptación (5-48), (5-49) y (5-50), respectivamente, y están diseñados para ajustarse al análisis de convergencia que se muestra en el próximo análisis.

**Proposición 1:** *Supongamos que las matrices de ganancia  $\boldsymbol{\alpha}$  y  $\mathbf{K}_r$  son definidas positivas definidas. Además, consideremos que  $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 > 0$  y la condición*

$$\alpha_i (2b_1 - \alpha_i^3) - \frac{1}{b_2^2} > 0 \quad (5-51)$$

*se cumple. Entonces, para todas las condiciones iniciales que parten de algún conjunto compacto, las soluciones  $\mathbf{e}(t)$  y  $\mathbf{S}(t)$  convergen a cero a medida que aumenta el tiempo*

*t*. Además, los errores de adaptación  $\tilde{\omega}_i(t)$ ,  $\tilde{c}(t)$  y  $\tilde{\sigma}(t)$  permanecen acotados para todo el tiempo  $t \geq 0$ .

**Demostración.** Primero se define la función definida positiva

$$V = \sum_i^n (V_i) = \sum_i^n \left[ \frac{1}{b_2} \ln(\cosh(b_2 S_i)) + \frac{1}{2} e_i^2 + \frac{1}{2b_3} (\tilde{\omega}_i^T \tilde{\omega}_i) \right] + \dots \quad (5-52)$$

$$+ \frac{1}{2b_4} (\tilde{c}^T \tilde{c}) + \frac{1}{2b_5} (\tilde{\sigma}^T \tilde{\sigma})$$

donde  $b_1, b_2, b_3, b_4$  y  $b_5$  son constantes estrictamente positivas utilizadas en las leyes de control y adaptación. Tomando la derivada temporal de (5-52) a lo largo de las ecuaciones de lazo cerrado (5-25) y (5-47) tenemos

$$\dot{V} = \sum_i^n \left[ (\tanh(b_2 S_i)) \dot{S}_i + e_i \dot{e}_i + \frac{1}{2b_3} (\tilde{\omega}_i^T \dot{\tilde{\omega}}_i) \right] + \frac{1}{b_4} (\tilde{c}^T \dot{\tilde{c}}) + \frac{1}{b_5} (\tilde{\sigma}^T \dot{\tilde{\sigma}}) \quad (5-53)$$

Sustituyendo la ecuación (5-25) y (5-47) en la ecuación (5-53) y realizando las manipulaciones algebraicas adecuadas obtenemos:

$$\dot{V} = \sum_i^n \left[ (-b_1 \tanh(b_2 S_i)^2) + \tanh(b_2 S_i) \tilde{\omega}_i^T(t) \hat{H}(\cdot) + \dots \right. \quad (5-54)$$

$$+ \tanh(b_2 S_i) \tilde{\omega}_i^T(t) (\Delta H_c \tilde{c} + \Delta H_\sigma \tilde{\sigma}) + \bar{e}_i - (\tanh(b_2 S_i)) k_{ri} \text{sign}(S_i) + \dots$$

$$\left. + \tanh(b_2 S_i) (\alpha_i S_i - \alpha_i^2 e_i) + e_i (S_i - \alpha_i e_i) + \frac{1}{b_3} (\tilde{\omega}_i^T \dot{\tilde{\omega}}_i) \right] + \frac{1}{b_4} (\tilde{c}^T \dot{\tilde{c}}) + \frac{1}{b_5} (\tilde{\sigma}^T \dot{\tilde{\sigma}})$$

Para simplificar la ecuación (5-54), los siguientes productos se reordenan mediante utilizando la propiedad  $x^T A y = y^T A^T x$ , con dimensiones coincidentes de  $x$ ,  $A$  e  $y$

$$\tilde{\omega}_i^T(t) \Delta H_c \tilde{c} = (\tilde{\omega}_i^T(t) \Delta H_c \tilde{c})^T = \tilde{c}^T \Delta H_c^T \tilde{\omega}_i(t)$$

$$\tilde{\omega}_i^T(t) \Delta H_\sigma \tilde{\sigma} = (\tilde{\omega}_i^T(t) \Delta H_\sigma \tilde{\sigma})^T = \tilde{\sigma}^T H_\sigma^T \tilde{\omega}_i(t)$$

Entonces, la ecuación (5-54) puede reescribirse tras agrupar los términos comunes como

$$\begin{aligned}
\dot{V} = & \sum_i^n [\tanh(b_2 S_i)(-b_1 \tanh(b_2 S_i)) + \tanh(b_2 S_i) \bar{\epsilon}_i + \dots \\
& + \tanh(b_2 S_i)(\alpha_i S_i - \alpha_i^2 e_i) - k_{r_i} |\tanh(b_2 S_i)| + e_i (r_i - \alpha_i e_i)] + \dots \\
& + \tilde{\omega}_i^T \left( \sum_i^n \left[ \hat{\mathbf{H}}(\cdot)(\tanh(b_2 S_i)) + \frac{1}{b_3} \dot{\tilde{\omega}}_i \right] \right) + \dots \\
& + \tilde{\mathbf{c}}^T \left( \sum_i^n [\tanh(b_2 S_i)(\Delta \mathbf{H}_c^T \tilde{\omega}_i(t))] + \frac{1}{b_4} \dot{\tilde{\mathbf{c}}} \right) + \dots \\
& + \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^T \left( \sum_i^n [\tanh(b_2 S_i)(\mathbf{H}_\sigma^T \tilde{\omega}_i(t))] + \frac{1}{b_5} \dot{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \right)
\end{aligned} \tag{5-55}$$

Es evidente que las leyes de adaptación (5-48), (5-49) y (5-50) se sugieren a partir de los tres últimos términos de (5-55). En concreto, la sustitución de las leyes de adaptación (5-48), (5-49) y (5-50) en la ecuación (5-55) conduce a

$$\begin{aligned}
\dot{V} = & \sum_i^n -b_1 (\tanh(b_2 S_i))^2 + \tanh(b_2 S_i)(\alpha_i S_i - \alpha_i^2 e_i) + \dots \\
& + e_i (S_i - \alpha_i e_i) + \beta_i (S_i)
\end{aligned} \tag{5-56}$$

Donde:

$$\beta_i(S_i) = \bar{\epsilon}_i \tanh(b_2 S_i) - \Gamma_i |\tanh(b_2 S_i)| \leq 0$$

ya que  $\Gamma_i \geq |\bar{\epsilon}_i|$ .

Ahora se analizan dos casos, cuando  $S_i = 0$  y  $S_i \neq 0$ . En primer lugar, analizando el caso  $S_i = 0$ , a partir de la ecuación (5-56) es fácil ver que todos los términos con  $\tanh(b_2 S_i)$  son iguales a cero, lo que lleva a

$$\dot{V}_i = -\alpha_i e_i^2 \leq 0$$

este resultado garantiza la acotación del error de seguimiento de la trayectoria cuando  $S_i = 0$ .

En segundo lugar, cuando  $S_i \neq 0$ ,  $\dot{V}$  puede reescribirse como

$$\dot{V} = \sum_i^n - \left( b_1 - \frac{\alpha_i S_i}{\tanh(b_2 S_i)} \right) (\tanh(b_2 S_i))^2 + (-\alpha_i^2 e_i \tanh(b_2 S_i) + e_i S_i) - \alpha_i e_i^2 + \beta_i \tag{5-57}$$

Así, definiendo el vector  $\mathbf{E} = (e_i \quad \tanh(b_2 S_i))^T$  la ecuación (5-57) puede expresarse como

$$\dot{V}_i = -\mathbf{E}^T \mathbf{Q}(S_i) \mathbf{E} - \alpha_i e_i^2 + \beta_i(S_i)$$

donde  $\mathbf{Q}(S_i)$  viene dado por

$$\mathbf{Q}(S_i) = \begin{pmatrix} \alpha_i/2 & \frac{\alpha_i^2}{2} - \frac{S_i}{2 \tanh(b_2 S_i)} \\ \frac{\alpha_i^2}{2} - \frac{S_i}{2 \tanh(b_2 S_i)} & b_1 - \frac{\alpha_i S_i}{\tanh(b_2 S_i)} \end{pmatrix} \quad (5-58)$$

donde el término  $-\alpha_i e_i^2$  se ha dividido convenientemente para incluir una mitad en el primer término de (5-58).

Para garantizar la convergencia del esquema de control propuesto, es necesario demostrar que la matriz  $\mathbf{Q}(S_i)$  es positiva definida. Utilizando el criterio de Sylvester es posible encontrar las condiciones para que  $\mathbf{Q}(S_i)$  sea una matriz definida positiva.

Este criterio conduce a las siguientes condiciones:

$$\alpha_i > 0 \quad (5-59)$$

$$\frac{\alpha_i}{2} \left( b_1 - \frac{\alpha_i S_i}{\tanh(b_2 S_i)} \right) - \left( \frac{\alpha_i^2}{2} - \frac{S_i}{2 \tanh(b_2 S_i)} \right)^2 > 0 \quad (5-60)$$

La condición (5-59) se cumple trivialmente. Expandiendo y reordenando la expresión (5-60), tenemos

$$2\alpha_i(b_1 - \alpha_i^3) > \left[ \frac{S_i}{\tanh(b_2 S_i)} \right]^2 \quad (5-61)$$

Utilizando el hecho de que

$$\left| \frac{S_i}{\tanh(b_2 S_i)} \right| \leq |S_i| + \frac{1}{b_2}$$

queda claro que la expresión (5-61) se satisface si se cumple la desigualdad

$$2\alpha_i(b_1 - \alpha_i^3) > \left( |S_i| + \frac{1}{b_2} \right)^2 \quad (5-62)$$

La desigualdad (5-62), y en consecuencia (5-59), se satisface para  $|S_i| < S_{imax}$  para algún  $S_{imax} > 0$ . De hecho, la condición suficiente para la existencia de algún  $S_{imax} > 0$  viene dada en (5-51), que siempre se cumple con  $b_1$  suficientemente grande y es condición suficiente para que  $\dot{V}$  sea una función localmente definida negativa.

Considerando la definición de  $V$  en (5-52) podemos escribir

$$V_i \geq \frac{1}{b_2} \ln(\cosh(b_2 S_i))$$

Utilizando la siguiente propiedad [64]

$$\frac{1}{b_2} \ln(\cosh(b_2 S_i)) \geq \left( |S_i| - \frac{1}{b_2} \ln(2) \right)$$

y despejando  $S_i$ , obtenemos

$$V_{Si} + \frac{1}{b_2} \ln(2) > |S_i| \quad (5-63)$$

Donde  $V_{Si} = \frac{1}{b_2} \ln(\cosh(b_2 S_i))$

Entonces, sustituyendo la ecuación (5-63) en la desigualdad (5-62) se obtiene la siguiente expresión se obtiene

$$2\alpha_i(b_1 - \alpha_i^3) > \left(V_{Si} + \frac{\ln(2)+1}{b_2}\right)^2$$

El cual satisface para  $S_i$  "pequeños", como hemos dicho antes. Por lo tanto, dado que  $\beta_i(S_i) \leq 0$  para todos los  $S_i$ ,  $\dot{V}$  se puede acotar por arriba como

$$\dot{V} \leq \sum_{i=1}^n -\alpha_i e_i^2 \quad \text{para } \forall \quad |S_i| < s_{imax} \quad i = 1, 2, \dots, 4 \quad (5-64)$$

llegando a la conclusión de que  $\dot{V}(t) \leq 0 \forall t \in [0, \infty)$  para condiciones iniciales  $S_i(0), e_i(0), \tilde{\omega}_i(0), \tilde{c}(0)$  y  $\tilde{\sigma}(0)$  comenzando en algún conjunto compacto.

De acuerdo con las ecuaciones (5-52), (5-59) y (5-64), e invocando el lema de Barbalat [102], estos resultados garantizan la acotación y convergencia a cero de la señal de error de control  $e_i(t)$  durante la operación en lazo cerrado del esquema de control propuesto. En otras palabras, el objetivo de control de seguimiento de la trayectoria se satisface con el controlador (5-30), (5-48), (5-49) y (5-50).

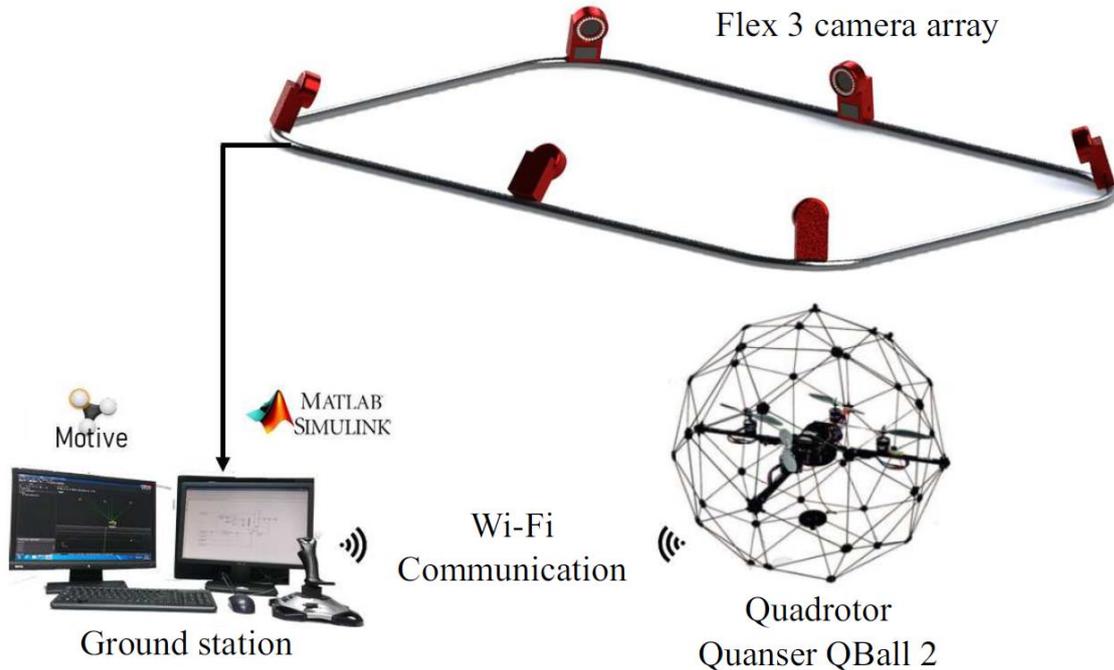


figura 5-3: Montaje experimental con el sistema de captura de movimiento Optitrack y el Cuadrícóptero QBall 2.

#### 5.4. Resultados Experimentales.

Para validar el esquema de control propuesto, se realizan pruebas experimentales.

La validación experimental consistió en implementar el esquema de control propuesto en el Cuadricóptero QBall 2 y compararlo con tres esquemas de control diferentes. Los esquemas de control seleccionados para la comparación son el controlador embebido más un esquema de PD, un esquema de control basado en un modelo adaptativo y un algoritmo de red neuronal adaptativa. Las comparaciones fueron diseñadas para realizar la tarea de seguimiento de trayectorias para dos trayectorias diferentes. Las trayectorias seleccionadas son una trayectoria lemniscata y una trayectoria circular.

### Plataforma experimental

Los experimentos en tiempo real se llevan a cabo en el Cuadricóptero QBall 2 integrado con el sistema de captura de movimiento Optitrack, como se muestra en la figura 5-3. El Cuadricóptero QBall 2 es una plataforma experimental de Quanser útil para probar diferentes esquemas de control. Los controladores se desarrollan en MATLAB-Simulink, y el software Quarc se utiliza para compilar y cargar el modelo Simulink en el ordenador de a bordo del UAV.

La posición y el ángulo de guiñada del Cuadricóptero son detectados mediante el sistema de captura de movimiento Optitrack utilizando un conjunto de 6 cámaras Flex 3 sincronizadas. Los ángulos de balanceo y cabeceo y las velocidades angulares se obtienen utilizando los sensores inerciales acelerómetro de 3 ejes y giroscopio de 3 ejes.

Las entradas de control del Cuadricóptero QBall 2 son las señales PWM asociadas al empuje de cada rotor. La tasa de muestreo es de 500 [Hz] tanto para la unidad de medición inercial del cuadricóptero como para el ordenador de a bordo donde se ejecuta el controlador. Para el sistema de captura de movimiento, la tasa de muestreo es de 30 [Hz]. El controlador embebido (5-3)-(5-4) y (5-7)-(5-10) se implementó en nuestro sistema experimental utilizando los siguientes parámetros y ganancias:

$$\begin{aligned}
 m &= 1,79[kg] & g &= 9.81[m/s] \\
 \omega_\phi &= 13.944 & \omega_\theta &= 13.944 \\
 \xi_\phi &= 1.593 & \xi_\theta &= 1.593 \\
 \tau_z &= 0.728
 \end{aligned} \tag{5-65}$$

Además, el controlador externo GRNN adaptativo propuesto en las ecuaciones (5-30) (5-48), (5-49), y (5-50) se implementó con las ganancias dadas por

$$\begin{aligned}
 b_1 &= 1.5 & b_2 &= 1.0 & b_3 &= 15 & K_u &= \text{diag}\{15.812,15.812,10.6,2.38\} \\
 b_4 &= 0.1 & b_5 &= 0.1 & m &= 5 & K_r &= \text{diag}\{0.001,0.001,0.001,0.001\} \\
 \alpha &= \text{diag}\{3,2,5,2\}
 \end{aligned} \tag{5-66}$$

Se seleccionaron valores aleatorios en el conjunto  $[-1, 1]$  para inicializar la matriz  $\hat{\omega}$  y el vector  $\hat{c}$ . Se utilizaron valores unitarios para inicializar los componentes del vector  $\hat{\sigma}$ .

Debido al término discontinuo en nuestro controlador el fenómeno de *chattering* está presente en las pruebas experimentales. Este es un efecto no deseado que puede ser atenuado mediante pequeñas ganancias en el término discontinuo.

Más concretamente, para reducir el fenómeno de *chattering* en nuestro controlador se seleccionaron los valores de la matriz  $F_i$  que corresponde a las ganancias del término discontinuo se seleccionaron considerablemente pequeños en comparación con las demás ganancias. En consecuencia, la red neuronal se encarga del rechazo de las perturbaciones y trata las incertidumbres paramétricas.

## Esquemas de control aplicados para la comparación

El rendimiento del esquema de control propuesto se compara con otros esquemas de control. Específicamente, el controlador integrado (5-3)-(5-4) junto con un control de lazo exterior de PD, el controlador adaptativo basado en el regresor del modelo reportado en [77], y el esquema de red neural adaptativa dado en [102] son implementados para la comparación.

### Controlador integrado más lazo de control de PD externo.

El controlador integrado (5-3)-(5-4) y (5-7)-(5-10) se implementó junto con un controlador externo de PD dado por

$$\mathbf{u} = (\mathbf{T}(\psi)\mathbf{K}_u)^{-1}(\mathbf{K}_p\mathbf{e} + \mathbf{K}_d\dot{\mathbf{e}}) \quad (5-67)$$

donde  $\mathbf{e}$  es la señal de error de control en (5-24) y  $\mathbf{K}_p, \mathbf{K}_d \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  son matrices diagonales positivas definidas. En este caso experimental, el controlador integrado en (5-3)-(5-4) y (5-7)-(5-10) se implementó con las ganancias (5-65) y el controlador de PD externo utilizó las ganancias

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_p &= \text{diag}\{4.5, 3, 7.5, 3\} \\ \mathbf{K}_d &= \text{diag}\{1.5, 1.5, 1.5, 1.5\} \end{aligned} \quad (5-68)$$

El controlador expresado por (5-3)-(5-4), (5-7)-(5-10), y (5-67) será denotado como ECPD.

### Esquema de control adaptativo del modelo regresor

El controlador adaptativo implementado para la validación experimental fue presentado en [77], y consiste en un lazo de control externo de posición y un lazo de control interno de actitud. Este esquema de control está diseñado considerando que las entradas de control son el empuje  $F$  y el par  $\tau$ . El controlador de posición viene dado por

$$\begin{aligned} F &= \frac{f_z}{\cos(\theta)\cos(\phi)} \\ \theta_d &= \tan^{-1}\left(\frac{1}{f_z}[f_y\sin(\psi_d) + f_x\cos(\psi_d)]\right) \\ \phi_d &= \tan^{-1}\left(\frac{\cos(\theta_d)}{f_z}[f_x\sin(\psi_d) - f_y\cos(\psi_d)]\right) \end{aligned} \quad (5-69)$$

donde  $F \in \mathbb{R}$  y es el empuje total,  $\theta_d$  y  $\phi_d$  son los ángulos deseados de cabeceo y balanceo respectivamente. El vector  $\mathbf{f} = [f_x, f_y, f_z]^T \in \mathbb{R}^3$  se define como

$$\mathbf{f} = \hat{m}\ddot{\mathbf{p}}_d + \hat{m}g\mathbf{e}_z + K_p\tilde{\mathbf{p}} + K_d\dot{\tilde{\mathbf{p}}}$$

con el error de posición definido como  $\tilde{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{p}_d(t) - \mathbf{p}(t)$ ;  $\hat{m}$  como una estimación dinámica de la masa del Cuadrícóptero,  $\mathbf{e}_z = [0 \ 0 \ 1]^T$  es un vector unitario a lo largo del eje z en el sistema de referencia inercial, y  $\mathbf{K}_p \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  y  $\mathbf{K}_d \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  son matrices diagonales positivas definidas. La ley de adaptación para la masa del Cuadrícóptero viene dada por

$$\hat{m} = \gamma_p \epsilon Y_p(\ddot{\mathbf{p}}_d)^T \tilde{\mathbf{p}} + \gamma_p Y_p(\ddot{\mathbf{p}}_d)^T \tilde{\mathbf{p}}$$

donde  $\gamma_p$  y  $\epsilon$  son constantes positivas,  $Y_p(\ddot{\mathbf{p}}_d) \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$  es la matriz de regresión de posición definida como  $Y_p(\ddot{\mathbf{p}}_d) = \ddot{\mathbf{p}}_d + g \mathbf{e}_z$ . El controlador de actitud viene dado por

$$\boldsymbol{\tau} = Y_\eta(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_r, \dot{\boldsymbol{\omega}}_r) \hat{\boldsymbol{\chi}}_\eta + K_s \mathbf{s} \quad (5-70)$$

donde  $\hat{\boldsymbol{\chi}}_\eta \in \mathbb{R}^6$  es el vector de parámetros estimado y  $K_s \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  es una matriz diagonal definida positiva,  $\mathbf{s} = \dot{\tilde{\boldsymbol{\eta}}} + \Lambda \tilde{\boldsymbol{\eta}}$  es el error de actitud filtrado con el error de actitud definido como  $\tilde{\boldsymbol{\eta}}(t) = \boldsymbol{\eta}_d(t) - \boldsymbol{\eta}(t)$  y  $\Lambda \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  es una matriz diagonal definida positiva. Una descripción detallada de este controlador y su implementación puede consultarse en [77]. El controlador dinámico adaptativo en (5-69) y (5-70) fue implementado experimentalmente usando las ganancias

$$\begin{aligned} K_p &= \text{diag}\{7.0, 7.0, 6.5\} \\ K_d &= \text{diag}\{2.5, 2.5, 4\} \\ K_s &= \text{diag}\{0.4, 0.4, 1.0\} \\ \Lambda &= \text{diag}\{4.38, 4.38, 1.5\} \\ \gamma_p &= 0.014 \\ \epsilon &= 1.39 \\ \Gamma_\eta &= 1.5 \times 10^{-3} \text{diag}\{1, 1, 1, 1, 1, 1\} \end{aligned} \quad (5-71)$$

En adelante, el controlador (5-69) - (5-70) se denominará AMRC

### Controlador de red neuronal adaptable

El controlador dado en [102] está formado por un lazo de control integral de modo de modo deslizante para la actitud y un lazo de control adaptativo adaptativo basado en redes neuronales para la posición. El vector  $\mathbf{u}_A = [\bar{u}_1 F, \bar{u}_2 F, F]^T$  es la entrada de control para el subsistema de posición que se define como

$$\mathbf{u}_A = M(\boldsymbol{\eta})^{-1} (g \mathbf{e}_3 + \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{X}_{in}) + k_v \boldsymbol{\gamma} + \ddot{\boldsymbol{\xi}}_r) \quad (5-72)$$

donde  $F \in \mathbb{R}$  es el empuje total,  $\bar{u}_1 = \cos(\psi) \sin(\theta) \cos(\phi) + \sin(\psi) \sin(\phi)$  y  $\bar{u}_2 = \sin(\psi) \sin(\theta) \cos(\phi) + \cos(\psi) \sin(\phi)$  son entradas de control auxiliares. Cabe mencionar que  $\ddot{\boldsymbol{\xi}}_r = [\ddot{x}_d, \ddot{y}_d, \ddot{z}_d]^T$  es un término de precompensación de la aceleración añadido para mejorar el rendimiento del controlador en las pruebas experimentales.

La matriz  $M(\boldsymbol{\eta}) = \text{diag}\{1/m, 1/m, \cos(\phi) \cos(\theta)/m\} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ;  $m$  es la masa del Cuadricóptero,  $g$  es la constante de aceleración constante de aceleración gravitacional,  $\mathbf{e}_3 = [0 \ 0 \ 1]^T$  es un vector unitario a lo largo del eje vertical,  $\boldsymbol{\gamma} = \dot{\boldsymbol{\xi}} + \Lambda \boldsymbol{\xi}$  es un vector de estado auxiliar, con  $\Lambda = \Lambda^T > 0$ , y  $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_d - \boldsymbol{\xi}$  como el error de posición, siendo  $\boldsymbol{\xi}_d$  la posición deseada y  $k_v$  una constante estrictamente positiva.

El vector  $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{X}_{in}) = \hat{W}^T \mathbf{P}(\mathbf{X}_{in})$  es la salida de una RBFNN,  $\mathbf{X}_{in}$  es el vector de entrada de la red neuronal con la función de activación definida por

$$P_i(\mathbf{X}_{in}) = e^{-\left(\frac{\|\mathbf{X}_{in} - \mathbf{c}_i\|}{\sigma_i^2}\right)}$$

donde  $\mathbf{c}_i$  y  $\sigma_i$  son el centro y la anchura de la función gaussiana, respectivamente. La matriz  $\hat{W}$  es la matriz de pesos estimada que se obtiene de

$$\hat{W} = \mathbf{A}\mathbf{P}(\mathbf{X}_{in})\hat{\gamma}^T$$

donde  $\mathbf{A}$  es una matriz de ganancia simétrica positiva definida. El bucle de control de está dado por

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}(\boldsymbol{\eta}) + \mathbf{C}(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}})\dot{\boldsymbol{\eta}} + \rho_\eta \text{sign}(\mathbf{s}_\eta) + k_\eta M \tilde{\mathbf{v}} \quad (5-73)$$

donde  $\rho_\eta$  y  $k_\eta$  son constantes positivas,  $\mathbf{C}(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}})$  es la matriz de Coriolis,  $\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_\eta - \dot{\boldsymbol{\eta}}$  es el error de velocidad angular,  $\mathbf{v}_\eta = \dot{\boldsymbol{\eta}}_d + k_w \tilde{\boldsymbol{\eta}} + \rho_w \text{sign}(\mathbf{s}_w)$ , el error de actitud se define como  $\tilde{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{\eta}_d - \boldsymbol{\eta}$ , siendo  $\boldsymbol{\eta}$  la actitud del Cuadricóptero, y  $\boldsymbol{\eta}_d$  la señal deseada de actitud,  $\rho_w$  y  $k_w$  son constantes positivas. Finalmente, las superficies de deslizamiento se definen como:

$$\mathbf{s}_w = \tilde{\boldsymbol{\eta}} + \lambda_w \int_0^t \tilde{\boldsymbol{\eta}} \quad \text{y} \quad \mathbf{s}_\eta = \tilde{\mathbf{v}} + \lambda_\eta \int_0^t \tilde{\mathbf{v}}$$

Una descripción detallada de este esquema de control puede consultarse en [102]. El controlador de red neuronal adaptativa se implementó experimentalmente utilizando las siguientes ganancias

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= [-1.5, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 1.5]^T \quad \lambda_w = 4.5 \\ \boldsymbol{\sigma} &= [5, 5, 5, 5, 5, 5, 5]^T \quad \rho_w = 1 \times 10^{-6} \\ \Lambda &= \text{diag}\{2.55, 2.55, 3.55\} \quad \lambda_\eta = 15 \\ A &= 0.15 \quad \rho_\eta = 1 \times 10^{-6} \\ k_v &= 1.257 \end{aligned} \quad (5-74)$$

El controlador expresado en (5-72)-(5-73) se indicará para su referenciación como ANNC.

## 5.5. Validación Experimental

Se realizan dos experimentos diferentes para validar el controlador propuesto. El primer experimento consiste en el seguimiento de una trayectoria lemniscata, y el segundo en el seguimiento de una trayectoria circular.

Las ganancias del esquema de control propuesto en (5-3)-(5-4), (5-7)-(5-10), y (5-30), el esquema ECPD en (5-3)-(5-4), (5-7)-(5-10), y (5-67), el esquema AMRC en (5-69)-(5-70), y el algoritmo ANNC en (5-72)-(5-73) se seleccionaron mediante un procedimiento de prueba y error que dio como resultado los valores dados en (5-65), (5-66), (5-68), (5-71), y (5-74).

### Experimento 1: Ruta lemniscata

La trayectoria de la lemniscata se describe mediante las siguientes señales

$$\begin{aligned}x_d(t) &= 0.5 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{4}t\right) [m] \\y_d(t) &= \operatorname{cos}\left(\frac{2\pi}{8}t\right) [m]\end{aligned}\tag{5-75}$$

$$\begin{aligned}z_d(t) &= 1.0 [m] \\ \psi_d(t) &= 0.0 [^\circ]\end{aligned}\tag{5-76}$$

tarea asignada. Sin embargo, el controlador propuesto se mantiene más cerca a la referencia que los otros controladores que se probaron. Las señales obtenidas de error de posición  $\tilde{x}(t)$ ,  $\tilde{y}(t)$ ,  $\tilde{z}(t)$ ; y error de ángulo de guiñada  $\tilde{\psi}(t)$  del cuadricóptero durante la tarea de seguimiento de la trayectoria. del Cuadricóptero durante la tarea de seguimiento de la trayectoria se muestran en la figura 5-5. Obsérvese que el controlador propuesto presenta señales de error más pequeñas durante todo el experimento.

Las acciones de control corresponden al empuje total  $F(t)$  proporcionado por los rotores y los pares alrededor de cada eje de rotación  $\boldsymbol{\tau}(t) = [\tau_\phi(t) \ \tau_\theta(t) \ \tau_\psi(t)]^T$ . Las señales de acción de control  $F(t)$  y  $\boldsymbol{\tau}(t)$  producidas durante el experimento se muestran en la figura 5-6. Las acciones de control para todos los esquemas de control son similares. Sin embargo, las acciones de control  $\tau_\phi(t)$  y  $\tau_\theta(t)$  proporcionadas por el controlador propuesto son menores en comparación con las producidas por los otros controladores y la amplitud de sus oscilaciones también es menor.

Para obtener un índice de comparación cuantitativo del rendimiento de los controladores, se calcula el valor cuadrático medio (RMS) de los errores de seguimiento y las señales de control de cada controlador.

Las señales de error de seguimiento se calculan con la siguiente expresión

$$\tilde{\gamma}_l = \gamma_l - \gamma_{ref}$$

donde  $c$  representa las señales  $x(t)$ ;  $y(t)$ ;  $z(t)$ , y  $\psi(t)$ , el subíndice  $ref$  denota la señal deseada,  $l$  indica el esquema de control implementado para obtener dicha señal, siendo denotado como "Propuesto" para el controlador en (5-3)-(5-4) y (5-7)-(5-10), (5-30), y (5-48)-(5-50), ECPD, AMRC, y ANNC, que fueron descritos anteriormente.

Los valores RMS de los errores de seguimiento se presentan en la Tabla 5-1. El intervalo de tiempo para calcular los valores RMS se estableció en  $10[s] \leq t \leq 35[s]$  cuando todas las señales han alcanzado sus estados estables.

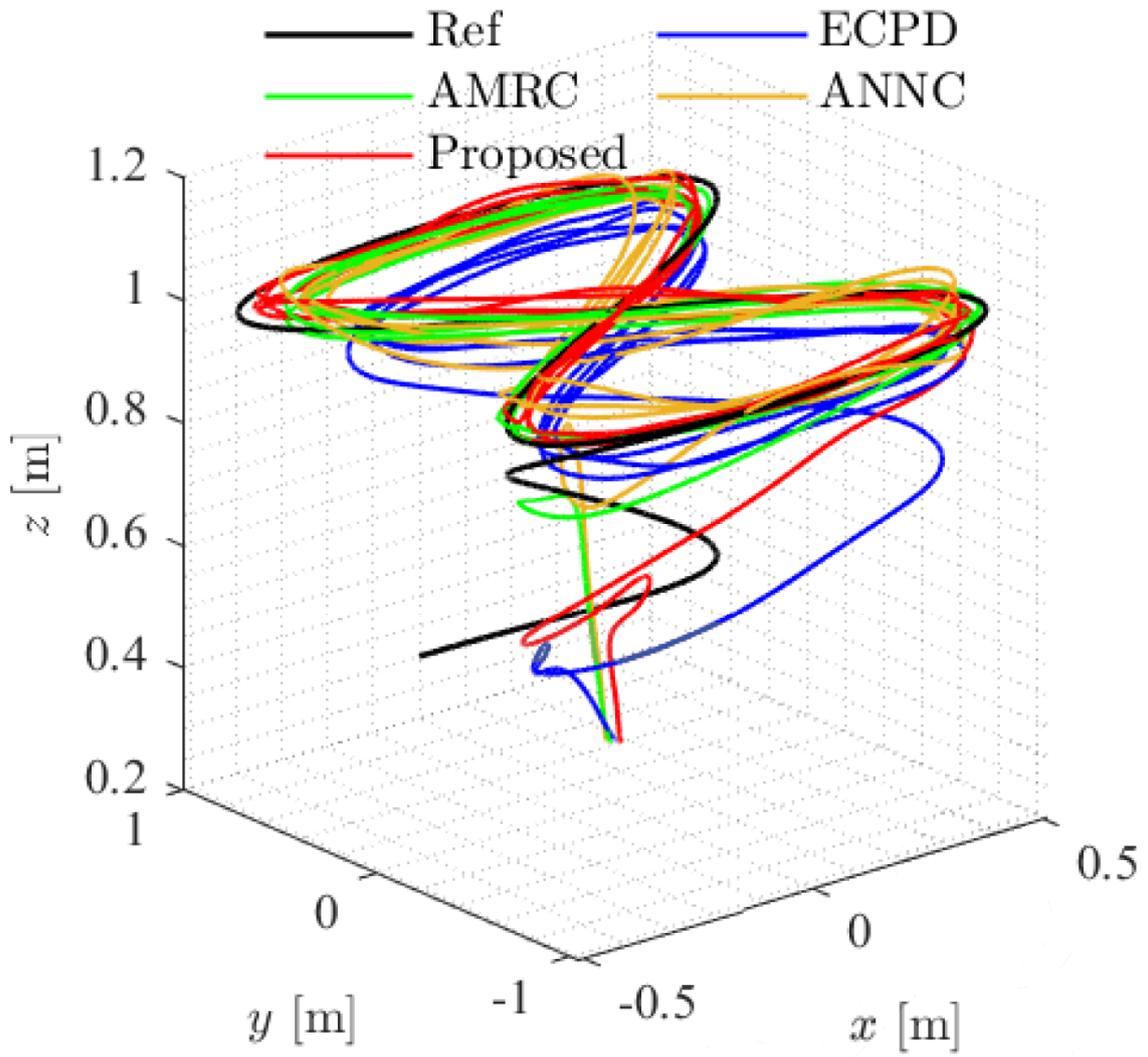


figura 5-4: Trayectoria  $(x(t); y(t); z(t))$  trazada por el Cuadrícóptero para el seguimiento de la trayectoria deseada en (5-75) y (5-76) al implementar el esquema ECPD, el controlador AMRC, el algoritmo ANNC y el esquema propuesto.

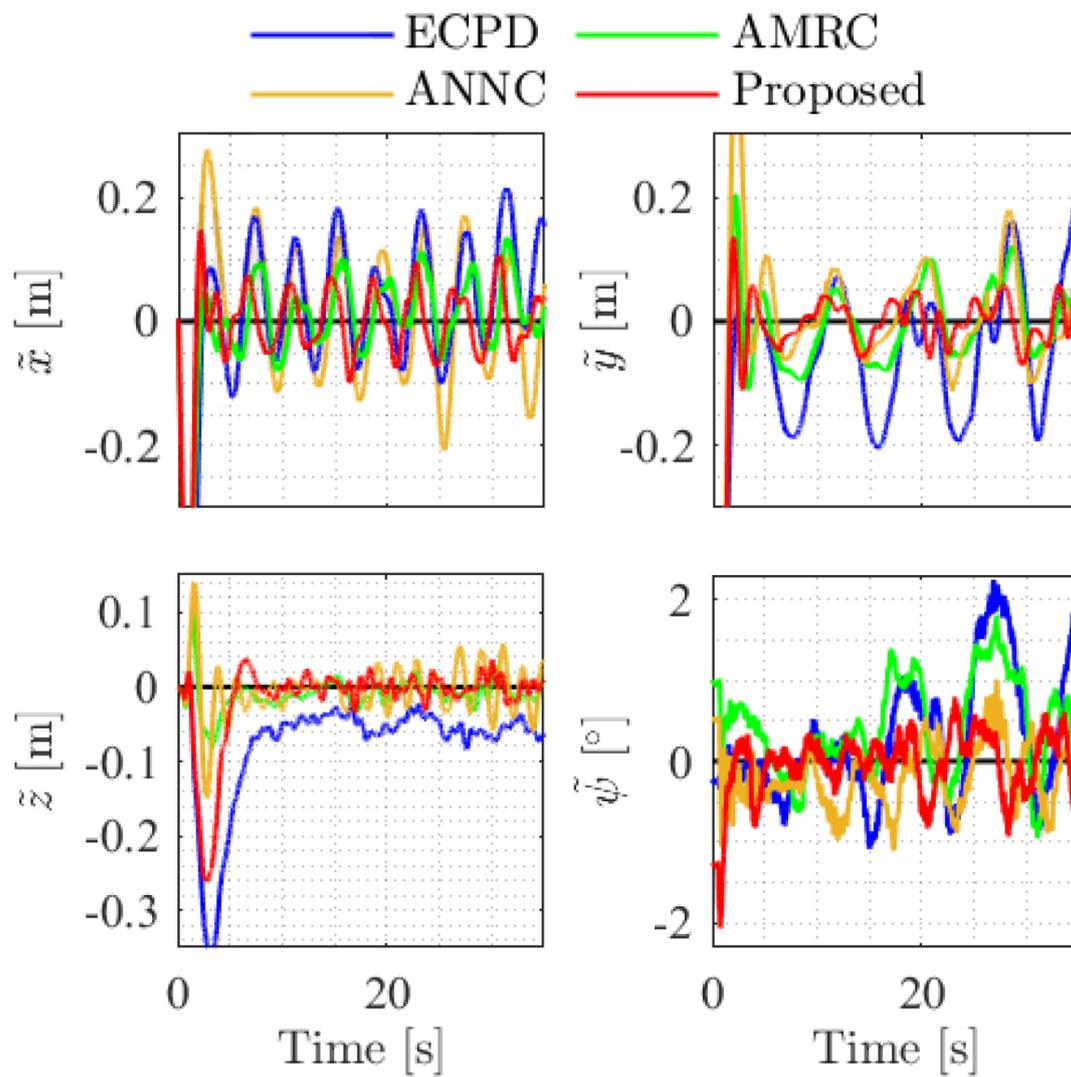


figura 5-5: Experimento 1: Evolución temporal del error de posición  $\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{z}(t)$ ; y error de ángulo de guiñada  $\tilde{\psi}(t)$  para el seguimiento de la trayectoria deseada en (5-75) y (5-76) al implementar el esquema ECPD, el controlador AMRC, el algoritmo ANNC, y el esquema Propuesto.

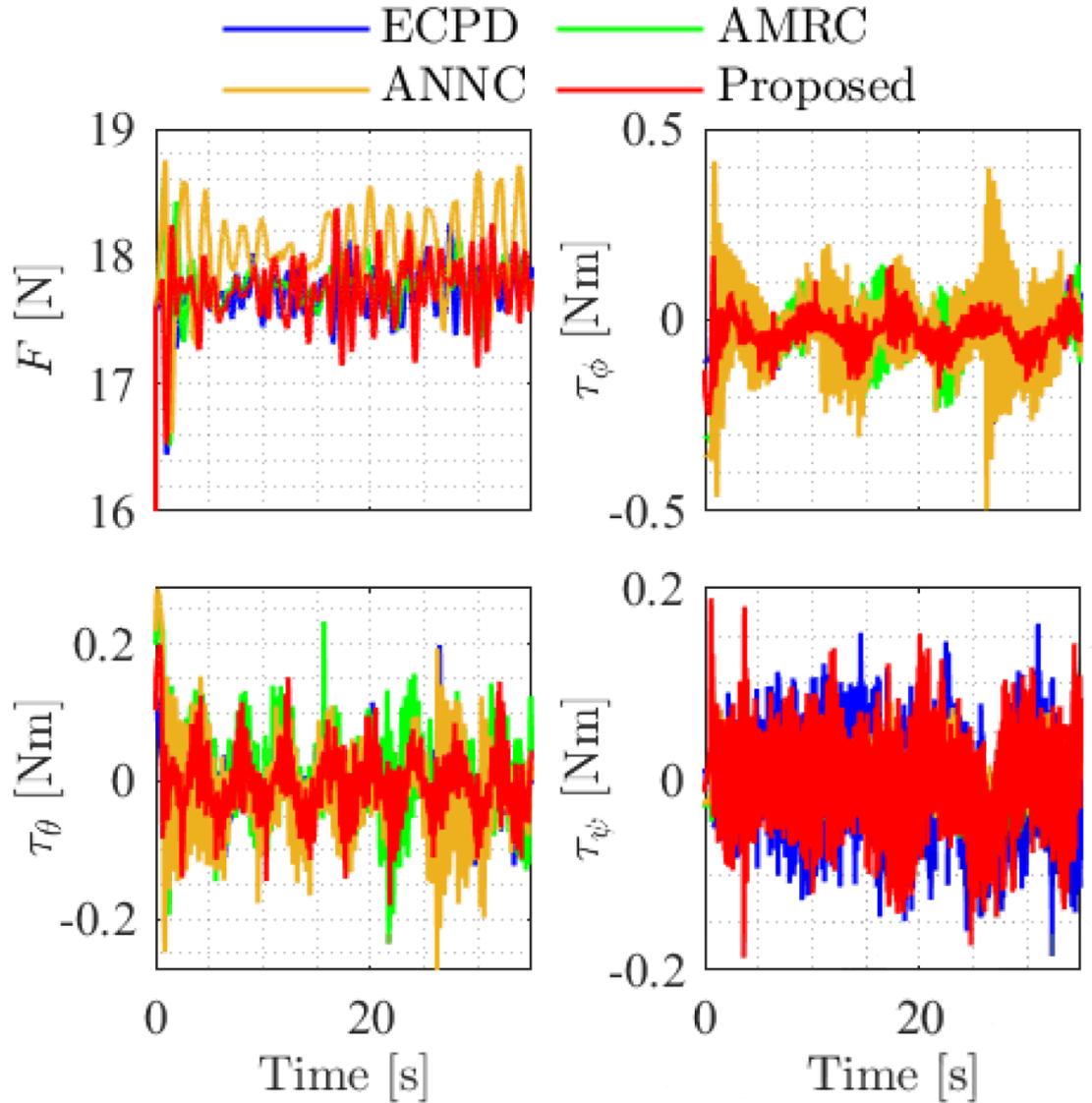


figura 5-6: Experimento 1: Acciones de control proporcionadas por el esquema ECPD, el controlador AMRC el algoritmo ANNC y el esquema propuesto.

Los valores más bajos están en negrita e indican un mejor rendimiento en la tarea de seguimiento de la trayectoria. Además, el porcentaje relativo de mejora  $P_{imp}\%$  con respecto al controlador ECPD también se calculó con el objetivo de proporcionar una mejor comprensión de la mejora obtenida con el AMRC, ANNC, y el controlador propuesto, siendo calculado como

$$P_{imp}\% (\tilde{y}_\zeta) = \frac{RMS(ECPD) - RMS(\zeta)}{RMS(ECPD)}$$

donde  $\zeta$  representa el esquema propuesto, el AMRC o el ANNC implementado para obtener esa señal de error.

Tabla 5-1: Experimento 1: Valores RMS del error de posición  $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$  y del error del ángulo de guiñada  $\tilde{\psi}$  en el intervalo de tiempo  $10[s] \leq t \leq 35[s]$ .

Error	Unidades	ECPD	AMRC	$P_{imp}\%$	ANNC	$P_{imp}\%$	Propuesto	$P_{imp}\%$
$\tilde{x}$	[m]	0.0981	0.0529	46.12	0.0952	2.97	<b>0.0480</b>	51.12
$\tilde{y}$	[m]	0.1104	0.0525	52.47	0.0637	42.32	<b>0.0348</b>	68.47
$\tilde{z}$	[m]	0.0525	0.0137	73.86	0.0256	51.19	<b>0.0125</b>	76.17
$\tilde{\psi}$	[s]	0.9445	0.7952	15.81	0.4566	51.66	<b>0.3427</b>	63.72

## Experimento 2: Trayectoria circular

La trayectoria circular se describe mediante las siguientes señales deseadas

$$\begin{aligned} x_d(t) &= 0.75 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{5}t\right) [m] \\ y_d(t) &= 0.75 \operatorname{cos}\left(\frac{2\pi}{5}t\right) [m] \end{aligned} \quad (5-77)$$

$$\begin{aligned} z_d(t) &= 1.0 [m] \\ \psi_d(t) &= 0.0 [^\circ] \end{aligned} \quad (5-78)$$

En la figura 5-7 se muestra una vista tridimensional de la trayectoria del Cuadricóptero. Las señales de error de la posición y el ángulo de guiñada del Cuadricóptero durante el seguimiento de la trayectoria circular se representan en la figura 5-8. Las señales de acción de control se muestran en la figura 5-9.

Los valores RMS de los errores de seguimiento para la tarea de seguimiento de la trayectoria circular se presentan en la Tabla 5-2. El intervalo de tiempo se establece en  $10[s] \leq t \leq 35[s]$  como en el Experimento 1. Los valores más bajos aparecen en negrita para identificar qué esquema de control proporciona un mejor rendimiento.

Los resultados van acompañados de su respectivo porcentaje de mejora. El esquema de control propuesto presenta la mejor precisión de seguimiento, lo que confirma la ventaja del GRNN.

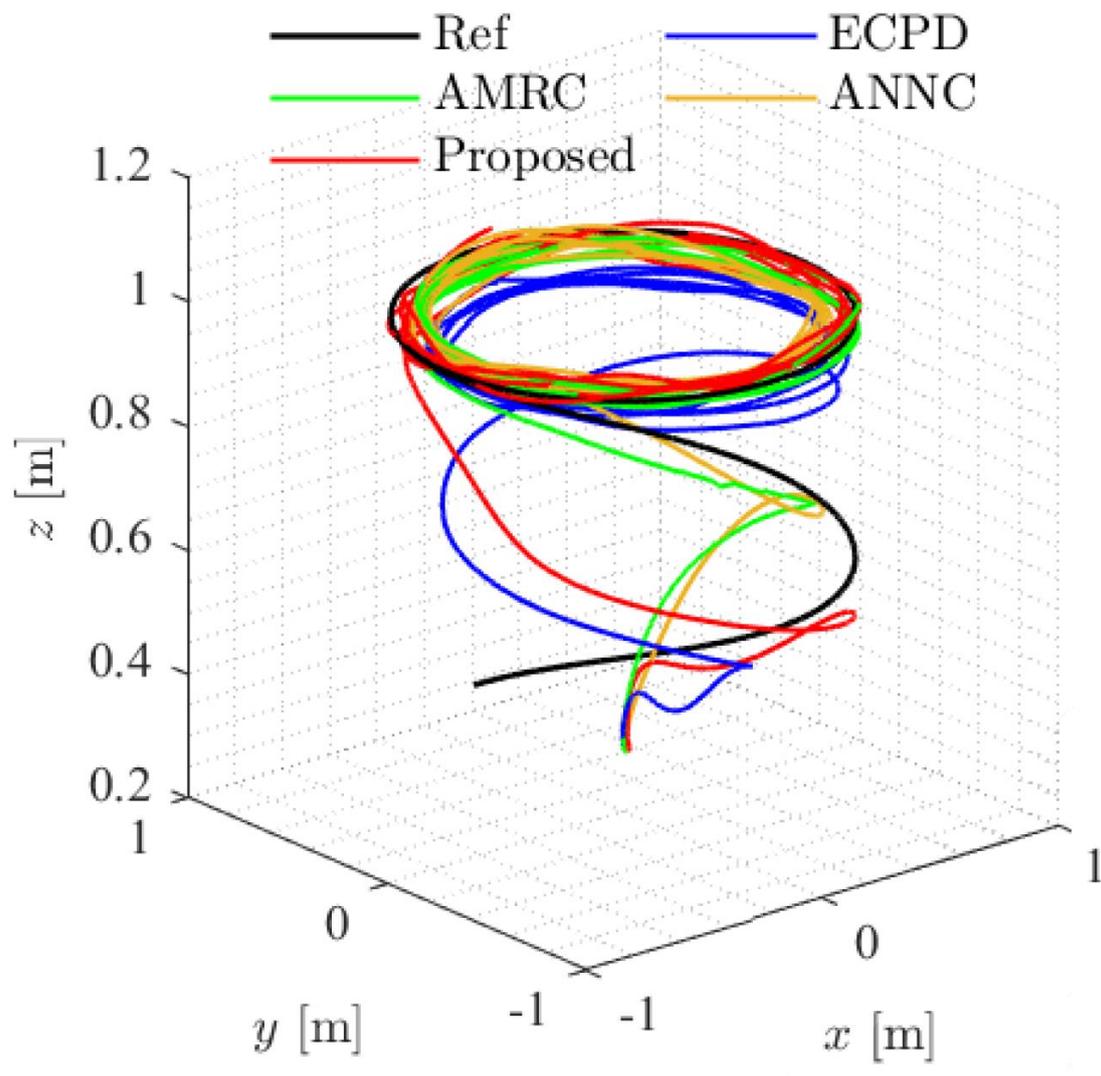


figura 5-7: Experimento 2: Trayectoria  $(x(t); y(t); z(t))$  dibujada por el Cuadrícóptero para el seguimiento de la trayectoria deseada en (5-77) y (5-78) al implementar el esquema ECPD, el controlador AMRC, el algoritmo ANNC y el esquema propuesto.

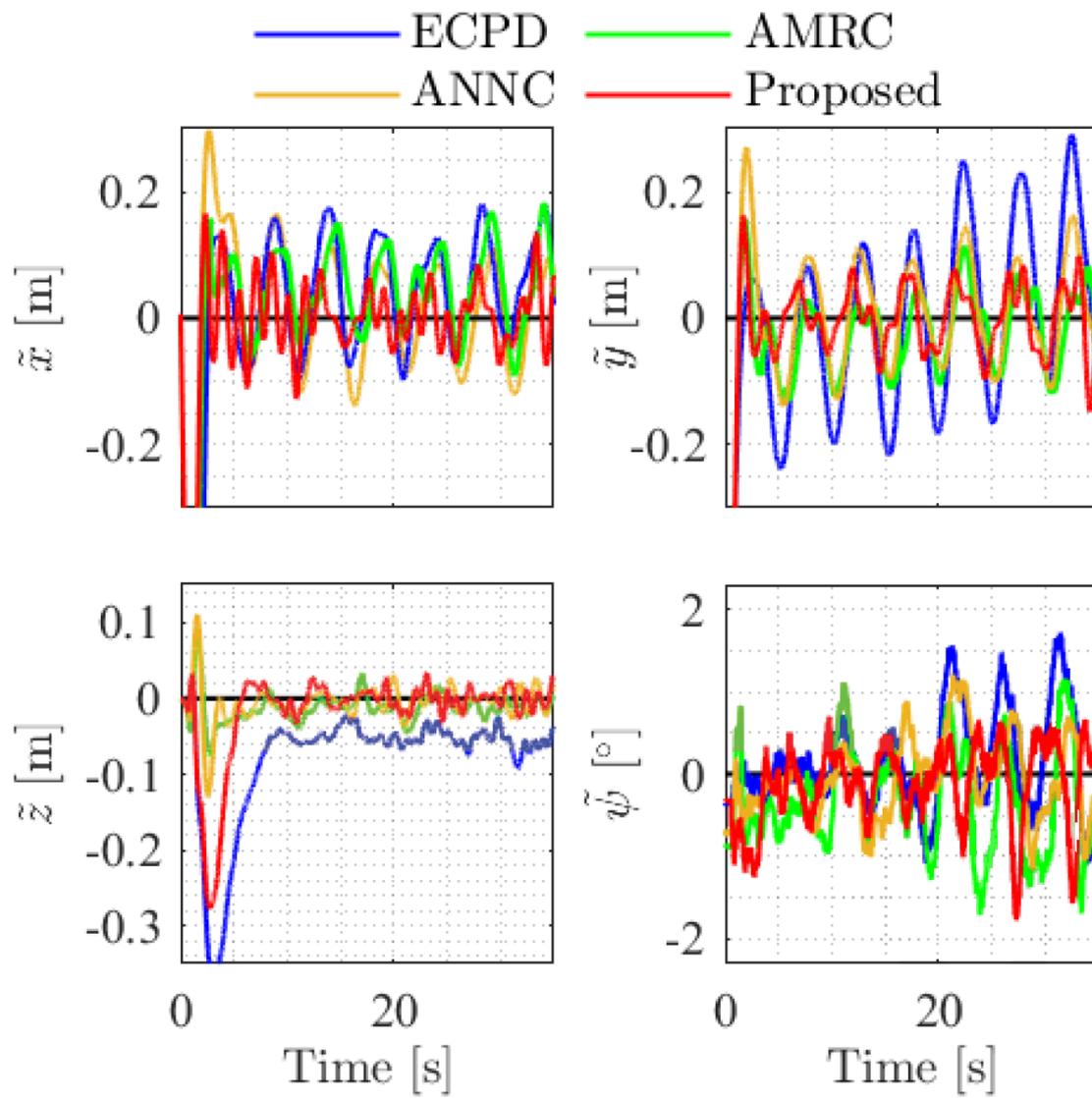


figura 5-8: Experimento 2: Evolución temporal del error de posición  $\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{z}(t)$ ; y error de ángulo de guiñada  $\tilde{\psi}(t)$  para el seguimiento de la trayectoria deseada en (5-77) y (5-78) al implementar el esquema ECPD, el controlador AMRC, el algoritmo ANNC, y el esquema propuesto.

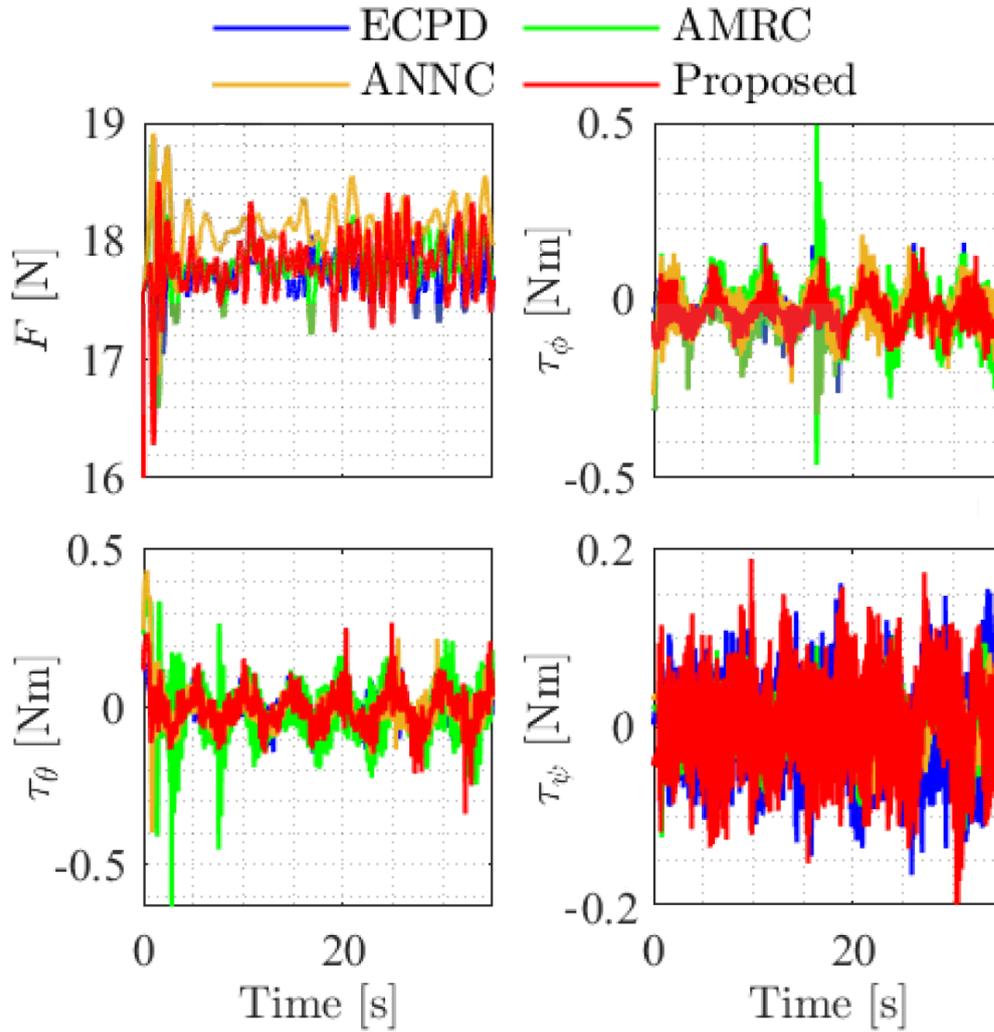


figura 5-9: Experimento 2: Acciones de control proporcionadas por el esquema ECPD, el controlador AMRC, el algoritmo ANNC y el esquema propuesto.

Tabla 5-2: Experimento 2: Valores RMS del error de posición  $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$  y del error del ángulo de guiñada  $\tilde{\psi}$  en el intervalo de tiempo  $10[s] \leq t \leq 35[s]$ .

Error	Unidades	ECPD	AMRC	$P_{imp}\%$	ANNC	$P_{imp}\%$	Propuesto	$P_{imp}\%$
$\tilde{x}$	[m]	0.0949	0.0812	14.41	0.0730	23.05	<b>0.0446</b>	53.01
$\tilde{y}$	[m]	0.1416	0.0615	56.57	0.0777	45.14	<b>0.0534</b>	62.30
$\tilde{z}$	[m]	0.0536	0.0174	67.58	0.0141	73.67	<b>0.0140</b>	73.86
$\tilde{\psi}$	[s]	0.7143	0.7590	_6.26	0.5362	24.93	<b>0.4857</b>	32.01

### 5.6. Observaciones finales

Este trabajo explora el modelado y el control de vehículos aéreos no tripulados asumiendo la presencia de un controlador integrado. Se introdujo un lazo de control externo consistente en una GRNN robusta de aprendizaje en línea. Y además se presentó un análisis de las trayectorias del sistema de lazo cerrado.

El esquema de control propuesto se implementó con éxito en un Cuadricóptero QBall 2. Se realizaron comparaciones experimentales del controlador propuesto con respecto al controlador embebido más un lazo de control de DP externo, un control de regresor de

modelo adaptativo y un algoritmo de red neuronal adaptativa. Los resultados obtenidos utilizando el controlador propuesto mostraron valores de error de seguimiento de posición y ángulo de guiñada menores que los obtenidos con los otros tres esquemas de control. Los porcentajes relativos de mejora demostraron las ventajas de utilizar el esquema de control propuesto.

## Capítulo 6. Transporte aéreo de cargas con múltiples Cuadricópteros basado en un controlador cinemático y un SMC neuronal de compensación dinámica.

### 6.1. Resumen del Capitulo

En este capítulo se presenta una propuesta novedosa en el control de formación para transportar una carga útil suspendida por cable con dos Cuadricópteros. La estructura de control se basa en un esquema de capas que combina un controlador cinemático basado en el espacio nulo y un controlador neural de modo deslizante (SMC). El controlador de espacio nulo está diseñado para generar referencias de velocidad para los Cuadricópteros en la formación, mientras que el controlador neural de modo deslizante recibe dichas velocidades de referencia y realiza una compensación dinámica para posibles incertidumbres paramétricas, así como para las perturbaciones dinámicas causadas por la carga fijada a los Cuadricópteros. La estabilidad del sistema de control en lazo cerrado así implementado también se demuestra con base en la teoría de Lyapunov. Se incluyen modelos dinámicos muy detallados para los Cuadricópteros, los cables flexibles y la carga útil en un escenario muy realista. Para finalizar el trabajo, se presentan simulaciones numéricas cuyos resultados demuestran un buen rendimiento del controlador propuesto.

### 6.2. Formulación del Problema:

Consideremos dos UAVs de rotor que transportan cooperativamente una carga útil suspendida por cable con masa puntual  $m$  (véase la figura 6-1). Sea  $\mathbf{x}_i^w = (x_i^w \ y_i^w \ z_i^w)^T$  es la posición del centro de gravedad (c.g.) del  $i$  –ésimo vehículo en el marco global. Además, la orientación de guiñada del  $i$  –ésimo UAV se denota por  $\psi_i^w$ . Así, la configuración del sistema viene dada por  $\mathbf{q} = (\mathbf{x}_1^w \ \psi_1^w \ \mathbf{x}_2^w \ \psi_2^w)^T$ . Por último, considera dos cables de longitud  $\ell$  que unen la carga útil con cada UAV.

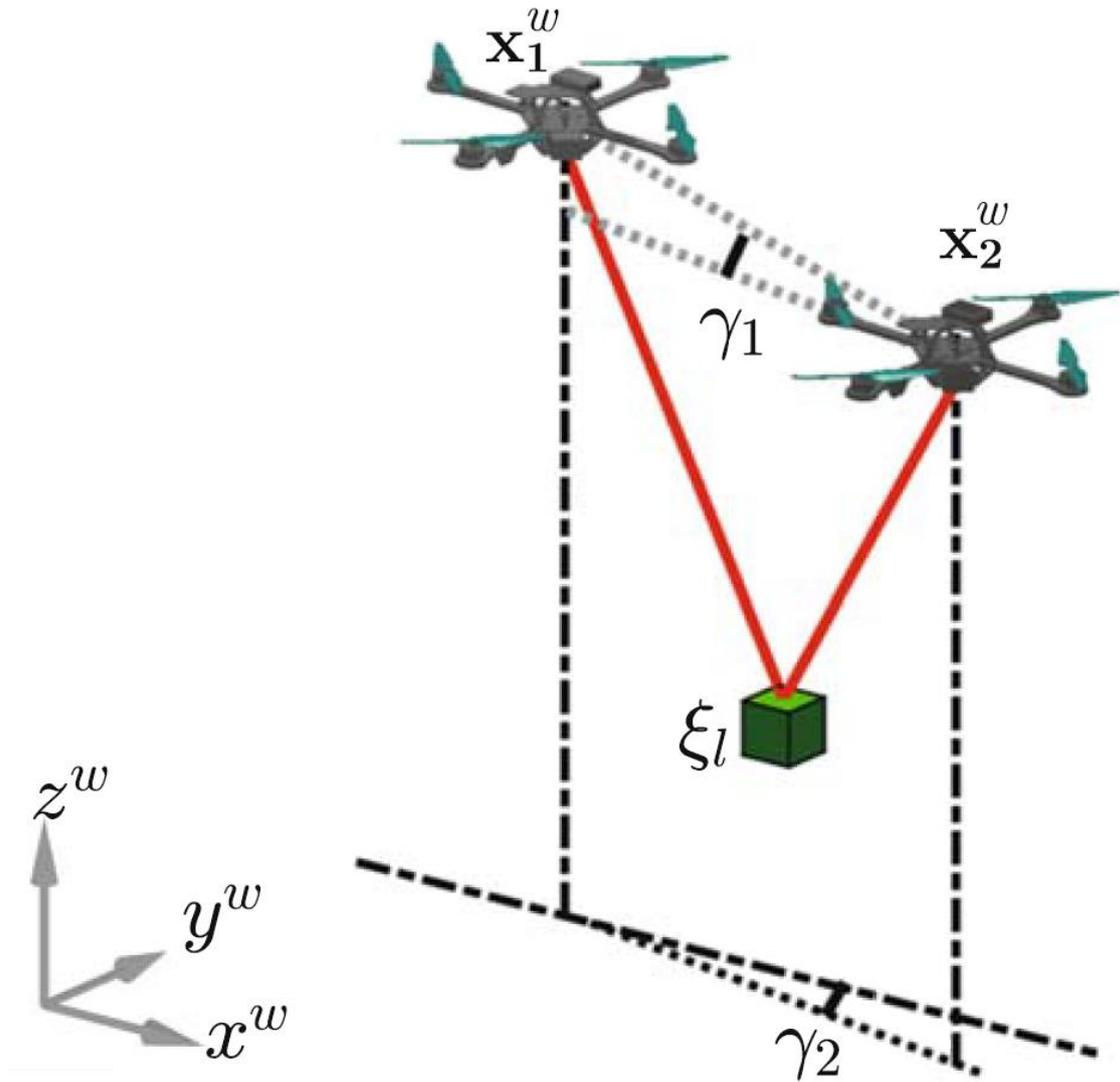


figura 6-1: Ilustración del esquema de transporte de la carga útil utilizando dos AscTec Hummingbird, donde ambos vehículos están conectados a la carga mediante cables flexibles

La formación debe cumplir las siguientes tareas (véase [107] y Apendice I para más detalles):

- i. evasión de obstáculos; donde  $\xi_{o,i}^w = (x_{o,i}^{w*} \ y_{o,i}^{w*} \ z_{o,i}^{w*})^T$  es la posición del  $i$  –ésimo obstáculo.
- ii. La posición de la carga útil  $\xi_\ell^w = (x_\ell^w \ y_\ell^w \ z_\ell^w)^T$  debe seguir una trayectoria deseada descrita como  $\xi_\ell^{w*} = \xi_\ell^{w*}(t) = (x_\ell^{w*} \ y_\ell^{w*} \ z_\ell^{w*})^T$
- iii. la distancia entre los dos vehículos aéreos no tripulados  $d = \|\mathbf{x}_1^w - \mathbf{x}_2^w\|$  debe mantenerse en el intervalo de seguridad  $d_m \leq d \leq d_M$
- iv. para una distribución equilibrada del peso, el ángulo de elevación  $\gamma_1 = \text{asen}((z_2^w - z_1^w)/d)$  debe garantizar que  $\check{f}_1/\rho = \check{f}_2/(1 - \rho)$ , donde  $\check{f}_i$  es una versión filtrada de la fuerza realizada por cada UAV, y  $0 < \rho < 1$  regula la proporción del peso de la carga levantada por cada UAV;
- v. para una navegación tangencial, la orientación de guiñada de la formación  $\gamma_2 = \text{atan}((y_2^w - y_1^w, x_2^w - x_1^w))$  debe ser tangencial a la trayectoria deseada;

vi. la orientación de guiñada de cada UAV debe permitir desplazamientos frontales.

La evasión de obstáculos es la tarea más prioritaria y debe activarse siempre que un potencial artificial positivo  $v$  supere un determinado umbral. Esta función debe ser  $\mathcal{V} = 0$  cuando no hay obstáculos cerca de la formación, y define las trayectorias de evasión a través de sus curvas de nivel ( $\dot{\mathcal{V}} = 0$ ). Por lo tanto, el objetivo de control es navegar en la región espacial con  $\mathcal{V} = 0$  (ver [107] para más detalles). Se puede demostrar que

$$\dot{U} = \mathbf{J}_1 \dot{\mathbf{q}} + a_1$$

donde  $\mathbf{J}_1 = \mathbf{J}_1(\mathbf{q})$  es el jacobiano de la tarea, y  $a_1$  es un valor residual. A continuación, la evasión de obstáculos se consigue considerando el controlador

$$\mathbf{v}_c^{(1)} = \mathbf{J}_1^\dagger (-k_v \mathcal{V} - a_1)$$

donde  $\mathbf{J}_1^\dagger$  denota la matriz pseudoinversa de  $\mathbf{J}_1$ . Las demás tareas pueden verificarse simultáneamente si no hay obstáculos cercanos. Para ellas, hay 8 variables de tarea independientes  $\boldsymbol{\xi} = (x_\ell^w \ y_\ell^w \ z_\ell^w \ d \ \gamma_1 \ \gamma_2 \ \psi_1^w \ \psi_2^w)^T$ , como en el vector  $\mathbf{q}$  de la configuración del sistema. Las velocidades de estas variables están relacionadas linealmente con  $\dot{\mathbf{q}}$  de la siguiente manera (ver [107] para más detalles):

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{J}_2 \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{a}_2 \quad (6-1)$$

donde  $\mathbf{J}_2 = \mathbf{J}_2(\mathbf{q})$  es el jacobiano de la tarea, y  $\mathbf{a}_2$  es un vector residual. Por lo tanto, estas tareas se pueden llevar a cabo utilizando el controlador cinemático inverso definido por

$$\mathbf{v}_c^{(2)} = \mathbf{J}_2^\dagger (\mathbf{v}_x - \mathbf{a}_2) \quad (6-2)$$

donde  $\mathbf{v}_x$  viene dado por (ver [107] para más detalles)

$$\mathbf{v}_x = \begin{pmatrix} \dot{\xi}_1^* + \mathbf{K}_{\ell,1} \tanh(\mathbf{K}_{\ell,2}(\xi_\ell^* - \xi_\ell)) \\ \tilde{d} \\ \dot{\gamma}_1^* + k_{\gamma,1} \tanh(k_{\gamma,2}(\gamma_1^* - \gamma_1)) \\ \dot{\gamma}_2^* + k_{\gamma,2} \tanh(k_{\gamma,2}(\gamma_2^* - \gamma_2)) \\ \dot{\psi}_1^{w*} + k_{\psi,1} \tanh(k_{\psi,2}(\psi_1^{w*} - \psi_1^w)) \\ \dot{\psi}_2^{w*} + k_{\psi,2} \tanh(k_{\psi,2}(\psi_2^{w*} - \psi_2^w)) \end{pmatrix} \quad (6-3)$$

con

$$\tilde{d} = \begin{cases} -k_{d,1} \tanh(k_{d,2}(d - d_m)) & \text{si } d < d_m \\ 0 & \text{si } d_m \leq d \leq d_M \\ -k_{d,1} \tanh(k_{d,2}(d - d_M)) & \text{si } d > d_M \end{cases} \quad (6-4)$$

$$\gamma_{1,d} = \gamma_1 + k_{\gamma,1} \tanh\left(k_{\gamma,2} \left(\frac{\check{f}_1}{\rho} - \frac{\check{f}_2}{(1-\rho)}\right)\right)$$

Finalmente, el controlador basado en el espacio nulo considerado para cumplir el mayor número posible de tareas viene dado por

$$\mathbf{v}_c = \mathbf{v}_c^{(1)} + (\mathbf{I}_8 - \mathbf{J}_1^\dagger \mathbf{J}_1) \mathbf{v}_c^{(2)} \quad (6-5)$$

Las velocidades de referencia calculadas por la ec.(6-3) se envían a cada Cuadricóptero. Estas velocidades de referencia son diferentes de las velocidades reales de cada vehículo, debido a la dinámica de todo el sistema y al hecho de que los robots no pueden alcanzar las referencias  $\mathbf{v}_c$  instantáneamente. Por lo tanto, se define un compensador dinámico en cascada para el control de la formación, con el fin de hacer que el error de seguimiento de la velocidad disminuya cuando el tiempo tiende a infinito (figura 6-2).

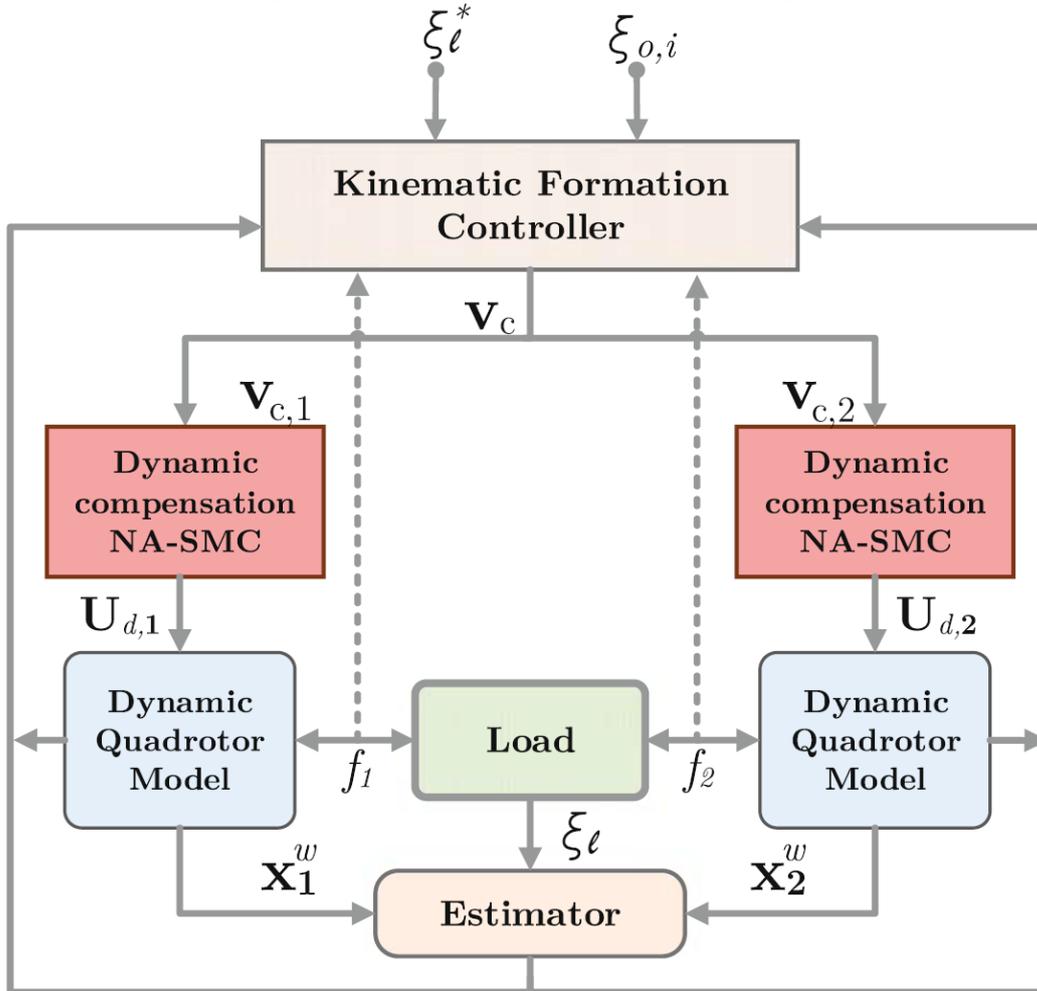


figura 6-2: marco de control de la formación

### 6.3. Modelo dinámico del Cuadricóptero:

El modelo de Cuadricóptero utilizado en este capítulo es un modelo no lineal muy realista de un miniCuadricóptero dado en [108]. La plataforma de Cuadricóptero considerada es el Hummingbird, de Ascending Technologies *GmbH*, que tiene una configuración plus. El Cuadricóptero tiene un microcontrolador a bordo que permite el control de bajo nivel y la estimación del estado del robot. Además, cuenta con una IMU integrada que proporciona información sobre las aceleraciones y las velocidades angulares. El Cuadricóptero Hummingbird se muestra en la figura 6-3 y se considera estructuralmente simétrico con respecto a los ejes X e Y, lo que da lugar a una matriz de inercia diagonal. Por lo tanto, las ecuaciones de cuerpo rígido de para el Cuadricóptero, con la fuerza y los pares causados por la carga, vienen dadas por las ecuaciones de Newton-Euler mostradas en (5-15)-(5-21).

Las velocidades lineal y angular del Cuadricóptero se miden con respecto al cuerpo o marco móvil unido a su centro de gravedad, y  $g$  es la aceleración de la gravedad. Los momentos se representan como  $L$ ,  $M$  y  $N$ , para las rotaciones alrededor de los ejes  $x^b$ ,  $y^b$  y  $z^b$ , respectivamente (véase la figura 6-3). Son generados por las cuatro hélices. Cada motor produce una fuerza vertical  $F_i$  proporcional a su velocidad angular velocidad angular  $\omega_i$ , o  $F_i = k_F \omega_i^2$ . Los rotores también producen un momento  $M_i = k_M \omega_i^2$ . Además, se considera que cada Cuadricóptero tiene una carga útil externa conectada a través de una articulación esférica situada por debajo de su centro de gravedad. Esto produce la fuerza  $F_\ell$  y los pares  $L_\ell$  y  $M_\ell$  que se añaden al modelo (3) (para más detalles ver [107]). Los parámetros dinámicos del Cuadricóptero Hummingbird se pueden encontrar en [108], y se presentan en la Tabla 6-1. Además, en [110] los mismos autores explican el control de bajo nivel embebido en cada Cuadricóptero, que garantiza el seguimiento de las señales de comando enviadas por el usuario. Son controladores PID con diferentes configuraciones, diseñados para cada grado de libertad del vehículo.

Parámetro	Valor
$I_{xx}$	$2.32 \times 10^{-3} \text{ kg/m}^2$
$I_{yy}$	$2.32 \times 10^{-3} \text{ kg/m}^2$
$I_{zz}$	$4.00 \times 10^{-3} \text{ kg/m}^2$
$m$	$0.5 \text{ kg}$
$\ell$	$0.175 \text{ m}$
$k_f$	$1.5 \times 10^{-9} \text{ Nn/rpm}^2$
$k_m$	$6.11 \times 10^{-8} \text{ Nn/rpm}^2$

Tabla 6-1: Parametros del AscTec Hummingbird Cuadricóptero

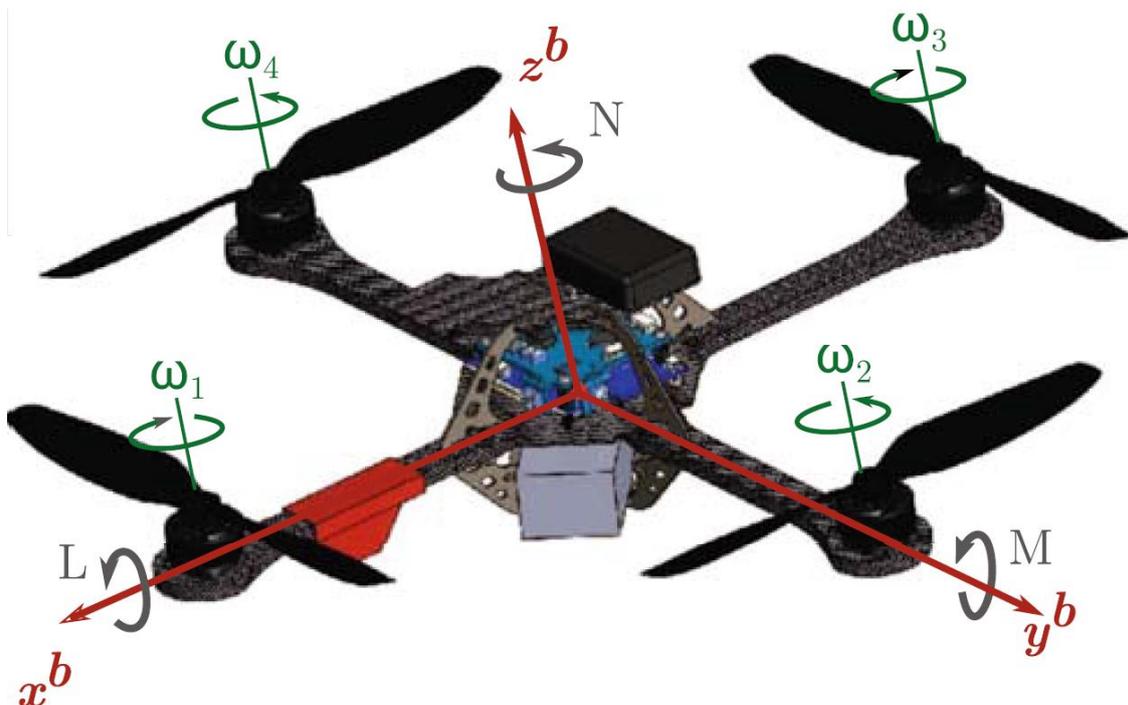


figura 6-3: El cuadricóptero Hummingbird de la empresa AscTec

En [91] se propone un enfoque novedoso para el modelado del Cuadricóptero basado en la respuesta interna del sistema de control y estabilización. Esta hipótesis fue validada experimentalmente en varios trabajos publicados, como [109], [111] y [29]

El modelo matemático utilizado para representar el comportamiento dinámico de un mini-Cuadricóptero es el siguiente. La relación entre la posición del Cuadricóptero y las señales de control que se le envían puede aproximarse mediante un modelo lineal de dos estados, que puede adoptarse para cualquier microUAV con piloto automático interno, con valores limitados de ángulos de cabeceo y balanceo. El modelo viene dado por (de (5-21).):

$$\ddot{\mathbf{x}}^w = \mathbf{T}(\psi)\mathbf{K}_u(\mathbf{x}^w, \dot{\mathbf{x}}^w)\mathbf{u} + \mathbf{K}_v\dot{\mathbf{x}}^w + \boldsymbol{\delta} \quad (6-6)$$

Este modelo se ha desarrollado considerando las maniobras no agresivas, y por lo tanto, los ángulos de balanceo ( $\theta$ ) y cabeceo ( $\phi$ ) son lo suficientemente pequeños como para ser considerados como cero. En consecuencia las señales de control  $\mathbf{u}$  son comandos de velocidad relacionados con el marco del cuerpo, considerando que los ángulos  $\theta$  y  $\phi$  son iguales a cero y  $\mathbf{T}(\psi)$  es una matriz de rotación que relaciona el marco móvil con el marco global. Obsérvese que las velocidades  $\dot{\mathbf{x}}^w = (\dot{x}^w \ \dot{y}^w \ \dot{z}^w \ \dot{\psi}^w)^T$  están relacionadas con el marco mundial  $\langle w \rangle$ . Además,  $\mathbf{K}_u = \text{diag}(k_1 \ k_3 \ k_5 \ k_7)$  y  $\mathbf{K}_v = \text{diag}(k_2 \ k_4 \ k_6 \ k_8)$  son matrices diagonales positivas definidas cuyas entradas son los parámetros del modelo. El ángulo de guiñada  $\psi^w$  también se da en el marco mundial. Para concluir, se introduce el término  $\Delta = (f_x/m \ f_y/m \ f_z/m \ 0)^T$ , para tener en cuenta las perturbaciones causadas por la carga útil que se transporta sobre cada Cuadricóptero. Además, se supone que la carga útil se encuentra en el centro de masa de cada Cuadricóptero. Por lo tanto el par de guiñada causado por ella es nulo. Finalmente, la (6-6) puede ser representada en el dominio del espacio de estado resulta

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{U} + \Delta \quad (6-7)$$

donde

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}^w \\ \dot{\mathbf{x}}^w \end{pmatrix}; \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{K}_v \end{pmatrix}; \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^w \\ \dot{\mathbf{x}}^w \end{pmatrix} \quad (6-8)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{T}(\psi)\mathbf{K}_u \end{pmatrix}; \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}; \Delta = \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\delta} \end{pmatrix} \quad (6-9)$$

Para concluir esta sección, mencionamos que los errores de control de velocidad se definen como

$$\mathbf{E}_v = \mathbf{X}_{ref} - \mathbf{X} \quad (6-10)$$

#### 6.4. Control neuronal adaptativo en modo deslizante NA-SMC

En esta sección se analiza el compensador dinámico. La solución propuesta para conseguir un seguimiento perfecto de la velocidad de referencia tiene dos contribuciones principales. En primer lugar, ofrece una técnica adaptativa en el transporte de cargas aéreas suspendidas por cable a través de múltiples UAVs. En segundo lugar, presenta una contribución teórica debido al análisis formal de estabilidad utilizando SMC en tareas cooperativas. Los fundamentos teóricos del SMC se dan en [29]. Una superficie de deslizamiento para un sistema MIMO puede definirse, en el estado de error  $\mathbf{S}$ , como:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \text{diag} \left( \left( \frac{d}{dt} + \lambda_1 \right) \dots \left( \frac{d}{dt} + \lambda_8 \right) \right) \int_0^t \mathbf{E}_v(\tau) d\tau = \dots \\ &= \mathbf{E}_v + \mathbf{\Lambda} \int_0^t \mathbf{E}_v(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (6-11)$$

con  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_8)$ . Por su parte, la derivada temporal de la superficie de deslizamiento  $\mathbf{S}$  es

$$\dot{\mathbf{S}} = \dot{\mathbf{E}}_v(t) + \mathbf{\Lambda} \mathbf{E}_v(t) \quad (6-12)$$

donde  $\lambda_i > 0$  para  $i = 1, \dots, 8$ . Entonces, la ley de control  $\mathbf{U}$  debe definirse de forma que  $\mathbf{S}$  alcance en tiempo finito  $t_S$ ; y  $\mathbf{S} = 0 \forall t > t_S$ .

La solución de este problema puede obtenerse adoptando la ley de control considerando la condición de deslizamiento [60]

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\mathbf{S}^T \mathbf{S}) \leq -\eta_{Max} \|\mathbf{S}\| \quad (6-13)$$

Con  $\Gamma_{Max} = \lambda_{max}(\mathbf{\Gamma})$ . Para diseñar un sistema de control en modo deslizante sistema de control en modo deslizante, se debe comenzar por deducir la ley de control ideal  $\mathbf{U}^*$ , que determina la dinámica del sistema en la superficie de deslizamiento. La ley de control se deduce teniendo en cuenta la condición de estabilidad del control en modo deslizante ( $\dot{\mathbf{S}} = 0$ ) y sustituyendo (6-7),

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{S}} &= \dot{\mathbf{E}}_v(t) + \mathbf{\Lambda} \mathbf{E}_v(t) = (\dot{\mathbf{X}}_{ref} - \dot{\mathbf{X}}) + \mathbf{\Lambda} \mathbf{E}_v(t) = \dots \\ &= (\dot{\mathbf{X}}_{ref} - \dot{\mathbf{X}}) + \mathbf{\Lambda} \mathbf{E}_v(t) = (\dot{\mathbf{X}}_{ref} - \mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{B}\mathbf{U} - \Delta) + \mathbf{\Lambda} \mathbf{E}_v(t) = 0 \end{aligned} \quad (6-14)$$

El objetivo de control es controlar el sistema dinámico del UAV modelado en la Ecuación (6-6) mediante una ley de control  $\mathbf{U}$  basada en una técnica de control en modo deslizante. En primer lugar, se requiere que  $\mathbf{U}$  cumpla la condición de la (6-15). Por lo tanto, se propone el siguiente controlador

$$\mathbf{U}^* = \mathbf{B}^{-1} \left( \dot{\mathbf{X}}_{ref} - \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{\Lambda} \mathbf{E}_v + \mathbf{\Gamma} \text{sign}(\mathbf{S}) \right) \quad (6-15)$$

donde  $\text{sign}(\mathbf{S})$  es un vector con el signo de los elementos del vector  $\mathbf{S}$

$$\text{sign}(\mathbf{S}) = \begin{cases} -1, \mathbf{S} < 0 \\ 0, \mathbf{S} = 0 \\ 1, \mathbf{S} > 0 \end{cases}$$

Además,  $\mathbf{\Gamma} = \text{diag}(\Gamma_1, \dots, \Gamma_8)$  y  $\|\Delta\| \leq \min(\Gamma_i)$  para  $i = 1, \dots, 8$ . A continuación, se define la siguiente función candidata de Lyapunov se define la siguiente función

$$V = \frac{1}{2} (\mathbf{S}^T \mathbf{S}) \quad (6-16)$$

Posteriormente, la derivada temporal de  $V$  a lo largo de la trayectoria del sistema viene dada por

$$\dot{V} = \mathbf{S}^T \dot{\mathbf{S}} = \mathbf{S}^T \left( \dot{\mathbf{X}}_{ref} - \mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{B}\mathbf{U} - \Delta + \mathbf{\Lambda} \mathbf{E}_v(t) \right) \quad (6-17)$$

Sustituyendo la acción de control (6-15) en la Ec. (6-17) resulta

$$\dot{V} = \mathbf{S}^T (-\mathbf{\Gamma} \text{sign}(\mathbf{S}) - \bar{\Delta}) \leq \lambda_{min}(\mathbf{\Gamma}) \|\mathbf{S}\| + \Delta \alpha \leq -\alpha \|\mathbf{S}\| \quad (6-18)$$

Donde  $\alpha = \lambda_{min}(\mathbf{\Gamma}) + \Delta$ , y  $\lambda_{min}$  es el valor propio mínimo de  $\mathbf{\Gamma}$ . A continuación, se dividen ambos términos de la (6-18) por  $\|\mathbf{S}\|$ . A continuación, se integran ambos lados de la ecuación en el intervalo  $0 \leq t \leq t_s$ , siendo  $t_s$  el tiempo necesario para alcanzar  $\mathbf{S}$ ,

$$\int_0^{t_s} \frac{\mathbf{S}^T \dot{\mathbf{S}}}{\|\mathbf{S}\|} d\tau \leq - \int_0^{t_s} \alpha d\tau \rightarrow \|\mathbf{S}(t_s)\| - \|\mathbf{S}(0)\| \leq -\alpha t_s \quad (6-19)$$

Cabe destacar que  $\|\mathbf{S}(t_s)\| = 0$ , por lo que

$$\frac{\|\mathbf{S}(0)\|}{\alpha} \leq t_s \quad (6-20)$$

Por tanto, alcanza la superficie de deslizamiento  $\mathbf{S}$  en un tiempo finito menor o igual a  $t_s$

### 6.5. Controlador Propuesto

A partir de la Ecuación (6-15) se propone el controlador

$$\mathbf{U}_d = \mathbf{B}^{-1} \left( \mathbf{\Omega} \mathbf{S} + \dot{\mathbf{X}}_{ref} - \mathbf{A} \mathbf{X} + \mathbf{\Lambda} \mathbf{E}_v - \hat{\Delta} + \mathbf{\Gamma} sign(\mathbf{S}) \right) \quad (6-21)$$

donde  $\mathbf{\Omega}$  es una matriz definida positiva y diagonal. El término  $\mathbf{\Omega} \mathbf{S}$  se incluye para garantizar el rendimiento del controlador. Además  $\hat{\Delta}$  es una variable de compensación estimada definida con el objetivo de mejorar la respuesta del sistema de control. En la práctica, las funciones de la Ecuación (6-7) incluyen las incertidumbres no modeladas, que, en nuestro caso, incluyen las fuerzas externas debidas a la carga útil. Este término puede ser aproximado correctamente en un conjunto compacto utilizando un número suficiente de neuronas de funciones de base radial (neuronas RBF) [65]. Las redes neuronales con funciones de base radial (RBF-NN) son un tipo de red neuronal artificial que calcula la salida de la función en función de la distancia a un punto llamado centro. Son redes multicapa que tienen conexiones feedforward y sólo tienen una capa oculta. La figura 6-4 muestra la arquitectura de una RBF-NN con las tres capas resaltadas. La primera es la capa de entrada donde se conecta el vector regresor con todas las funciones de base radial. La segunda capa o capa oculta se encuentra en las funciones de base radial. Por último, la salida de la red es una combinación lineal de las salidas de las funciones de base radial. Este tipo de redes construyen aproximaciones que son combinaciones lineales de múltiples funciones locales no lineales [112].

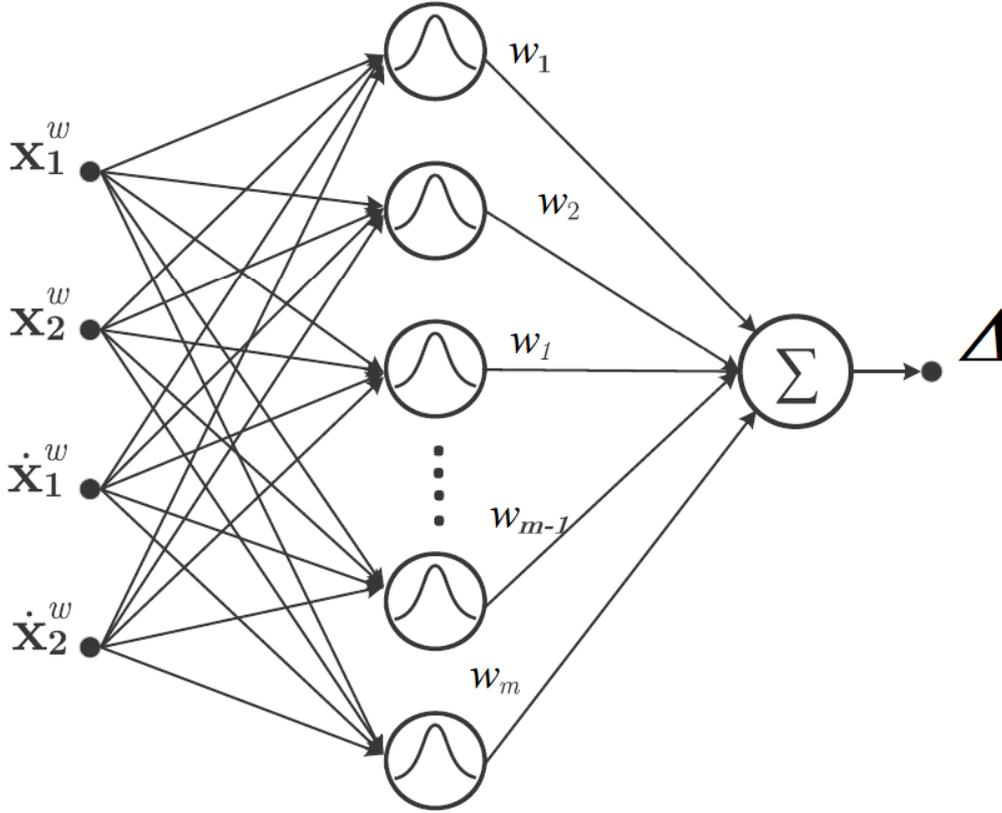


figura 6-4: Arquitectura de una red neuronal con funciones de base radial

En consecuencia, se calcula utilizando una RBF-NN

$$\delta = \mathbf{w}^{*T} \boldsymbol{\varphi}(\bar{\mathbf{x}}) + \boldsymbol{\varepsilon} \rightarrow \Delta = \begin{pmatrix} 0_{4 \times 4} \\ I_{4 \times 4} \end{pmatrix} \delta = L\delta \quad (6-22)$$

donde  $\mathbf{w}^{*T} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  es el vector de pesos óptimos, con  $n = 4$ ,  $m$  es el número de neuronas;  $\boldsymbol{\varphi}(\cdot) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$  es el vector de la función de base radial;  $\bar{\mathbf{x}} = [\mathbf{x}_1^w, \mathbf{x}_2^w, \dot{\mathbf{x}}_1^w, \dot{\mathbf{x}}_2^w]^T$  es el vector de regresión asociado a la RBF-NN. Este vector incluye la información utilizada para ajustar las NNs y puede ser considerado como un parámetro de diseño en función del rendimiento del controlador o de la dinámica del sistema. Por último,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  representa el mínimo error de aproximación.

**Consideración 1:**  $\delta$  puede ser aproximado por una RBF-NN con un error de aproximación acotado por [69]

$$\|\delta - \mathbf{w}^{*T} \boldsymbol{\varphi}(\bar{\mathbf{x}})\| \leq \|\boldsymbol{\varepsilon}\| \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1} \quad (6-23)$$

donde  $\boldsymbol{\varepsilon}$  es el error de aproximación, y está acotado en el intervalo  $0 \leq \|\boldsymbol{\varepsilon}\| \leq \varepsilon_{max}$ . Además,  $m > 1$  es el número de neuronas de la RBF-NN. En este trabajo se utiliza la función gaussiana como RBF, tal que  $\boldsymbol{\varphi}(\cdot) = [\varphi_1(\cdot), \varphi_2(\cdot), \dots, \varphi_m(\cdot)]^T$  se define como:

$$\varphi_i(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{c}, \sigma) = \exp\left(-\frac{1}{\sigma_i^2} (\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{c}_i)^T (\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{c}_i)\right) \quad (6-24)$$

donde  $\mathbf{c} = [c_1, c_2, \dots, c_m]^T$  contiene los centros vectoriales de la RBF-NN, y  $\sigma$  es la varianza de la función gaussiana. Los parámetros óptimos de la Ecuación (6-23) se asumen como constantes desconocidas. Por lo tanto, es necesario estimar sus valores,

definiendo un nuevo vector de pesos  $\hat{\omega}$  como el vector de parámetros estimados  $\omega^*$ . Por lo tanto, definiendo el vector de error de aproximación  $\tilde{\omega} = \omega^* - \hat{\omega}$  la representación neuronal (6-22) puede ser reformulada como:

$$\Delta = L\delta = L(\omega^{*T}\varphi(\bar{x}) + \varepsilon) = L((\tilde{\omega}^T + \hat{\omega}^T)\varphi(\bar{x}) + \varepsilon) \quad (6-25)$$

En consecuencia, el estimador de la perturbación utilizado en la ley de control puede representarse como

$$\hat{\Delta} = L\hat{\delta} = L(\hat{\omega}^T\varphi(\bar{x})) \quad (6-26)$$

Ahora, la Ec. (6-21) se convierte en

$$U_d = B^{-1}(\Omega S + \dot{X}_{ref} - AX + \Lambda E_v - L(\hat{\omega}^T\varphi(\bar{x})) + \Gamma sign(S)) \quad (6-27)$$

y, sustituyendo (6-26) en la Ec. (6-14)

$$\begin{aligned} \dot{S} &= (\dot{X}_{ref} - AX - BU - \Delta) + \Lambda E_v(t) = \dots \\ &= (\dot{X}_{ref} - AX - BU - L((\tilde{\omega}^T + \hat{\omega}^T)\varphi(\bar{x}) + \varepsilon)) + \Lambda E_v(t) \end{aligned} \quad (6-28)$$

Finalmente, utilizando la ley de control de la Ecuación (6-27) y sustituyéndola en la Ecuación (6-28) se obtiene

$$\dot{S} = \Omega S - L\tilde{\omega}^T\varphi(\bar{x}) - L\varepsilon - \Gamma sign(S) \quad (6-29)$$

## 6.6. Análisis de convergencia y ley de ajuste neuronal

En esta subsección se aborda el análisis de estabilidad del controlador presentado anteriormente. Este análisis se basa en la teoría de Lyapunov. Para ello, se propone la función candidata de Lyapunov de la siguiente forma:

$$V = \frac{1}{2} \left( S^T P S + \frac{1}{\gamma} tr(\tilde{\omega}^T \tilde{\omega}) \right) \quad (6-30)$$

donde la matriz  $P$  es una matriz simétrica positiva y  $\gamma > 0$ . A continuación, la derivada temporal de  $V$  viene dada por

$$\dot{V} = \left( S^T P \dot{S} + \frac{1}{\gamma} tr(\tilde{\omega}^T \dot{\tilde{\omega}}) \right) \quad (6-31)$$

Sustituyendo (6-29) en la ecuación (6-31)

$$\dot{V} = \left( S^T P \Omega S - S^T P L \tilde{\omega}^T \varphi(\bar{x}) - S^T P L \varepsilon - S^T P \Gamma sign(S) + \frac{1}{\gamma} tr(\tilde{\omega}^T \dot{\tilde{\omega}}) \right) \quad (6-32)$$

Si  $Q$  es una matriz de Hurwitz, a partir del teorema de Lyapunov, para cualquier matriz real simétrica positiva  $Q$ , la solución  $P$  de la ecuación matricial continua de Lyapunov

$$\Omega^T P + P \Omega = -2Q \quad (6-33)$$

es una matriz real definida positiva. Entonces, la Ec. (6-32) puede ser expresada como

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \frac{1}{2}(\mathbf{S}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\Omega} \mathbf{S} + \mathbf{S}^T \boldsymbol{\Omega}^T \mathbf{P} \mathbf{S}) - \mathbf{S}^T \mathbf{P} \mathbf{L} \tilde{\boldsymbol{\omega}}^T \boldsymbol{\varphi}(\bar{\mathbf{x}}) - \dots \\
&\quad - \mathbf{S}^T \mathbf{P} \mathbf{L} \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{S}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\Gamma} \text{sign}(\mathbf{S}) + \frac{1}{\gamma} \text{tr}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}^T \dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}) = \dots \\
&\quad = -\mathbf{S}^T \mathbf{Q} \mathbf{S} - \mathbf{S}^T \mathbf{P} \mathbf{L} \tilde{\boldsymbol{\omega}}^T \boldsymbol{\varphi}(\bar{\mathbf{x}}) - \dots \\
&\quad - \mathbf{S}^T \mathbf{P} \mathbf{L} \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{S}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\Gamma} \text{sign}(\mathbf{S}) + \frac{1}{\gamma} \text{tr}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}^T \dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}})
\end{aligned} \tag{6-34}$$

Considerando la definición del operador traza

$$\mathbf{S}^T \mathbf{P} \mathbf{L} \tilde{\boldsymbol{\omega}}^T \boldsymbol{\varphi}(\bar{\mathbf{x}}) = \text{tr}(\mathbf{S}^T \mathbf{P} \mathbf{L} \tilde{\boldsymbol{\omega}}^T \boldsymbol{\varphi}(\bar{\mathbf{x}})) = \text{tr}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}^T \boldsymbol{\varphi}(\bar{\mathbf{x}}) \mathbf{S}^T \mathbf{P} \mathbf{L}) \tag{6-35}$$

Sustituyendo (6-35) en la Ecuación (6-34) y operando matemáticamente resulta

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= -\mathbf{S}^T \mathbf{Q} \mathbf{S} + \text{tr} \left( -\tilde{\boldsymbol{\omega}}^T \boldsymbol{\varphi}(\bar{\mathbf{x}}) \mathbf{S}^T \mathbf{P} \mathbf{L} + \frac{1}{\gamma} \tilde{\boldsymbol{\omega}}^T \dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}} \right) - \mathbf{S}^T \mathbf{P} \mathbf{L} \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{S}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\Gamma} \text{sign}(\mathbf{S}) = \dots \\
&= -\mathbf{S}^T \mathbf{Q} \mathbf{S} + \text{tr} \left( \tilde{\boldsymbol{\omega}}^T \left( -\boldsymbol{\varphi}(\bar{\mathbf{x}}) \mathbf{S}^T \mathbf{P} \mathbf{L} + \frac{1}{\gamma} \dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}} \right) \right) - \mathbf{S}^T \mathbf{P} \mathbf{L} \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{S}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\Gamma} \text{sign}(\mathbf{S}) = \dots
\end{aligned} \tag{6-36}$$

Según la suposición de que los valores óptimos de los pesos neuronales son constantes y desconocidos, entonces  $\tilde{\boldsymbol{\omega}}^* = \mathbf{0}$ , y por lo tanto,

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}^* - \dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}^T \boldsymbol{\varphi}(\bar{\mathbf{x}}) \mathbf{S}^T \mathbf{P} \mathbf{L} \tag{6-37}$$

O

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}} = -\tilde{\boldsymbol{\omega}}^T \boldsymbol{\varphi}(\bar{\mathbf{x}}) \mathbf{S}^T \mathbf{P} \mathbf{L} \tag{6-38}$$

Introduciendo dicha ecuación en la Ecuación (6-36), resulta

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \mathbf{S}^T \mathbf{Q} \mathbf{S} - \mathbf{S}^T \mathbf{P} \mathbf{L} \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{S}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\Gamma} \text{sign}(\mathbf{S}) = \dots \\
&\leq \lambda_{\min}(\mathbf{Q}) \|\mathbf{S}\|^2 + \lambda_{\max}(\mathbf{P}) \|L\| \|\mathbf{S}\| \varepsilon_{\max} - \lambda_{\max}(\mathbf{P}) \lambda_{\min}(\boldsymbol{\Gamma}) \|\mathbf{S}\| = \dots \\
&\leq \lambda_{\min}(\mathbf{Q}) \|\mathbf{S}\|^2 - \lambda_{\max}(\mathbf{P}) \rho \|\mathbf{S}\| \leq 0
\end{aligned} \tag{6-39}$$

donde  $\rho = (\|L\| \varepsilon_{\max} - \lambda_{\min}(\boldsymbol{\Gamma})) < 0$ , verificando así la estabilidad en el origen del sistema de control propuesto por (6-27). Esto implica que  $\mathbf{S}(t)$  y  $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$  son variables acotadas y  $\mathbf{S}(t) \rightarrow \mathbf{0}$  con  $t \rightarrow \infty$ .

## 6.7. Simulación Numérica

### Modelado de cables flexibles

El sistema utilizado para realizar la validación de la propuesta de controlador de formación dinámica propuesto se basa en la interacción de varias etapas de software. La primera es la simulación y posterior identificación paramétrica del modelo dinámico de un mini-Cuadróptero de 6 grados de libertad. Además, la simulación de los cables y la carga acoplada a cada vehículo. Los cables se modelan como múltiples modelos Kelvin-Voigt de masas puntuales unidas por muelles y amortiguadores. Esto permite movimientos de balanceo y ondulación en el cable. Todos los modelos están

implementados en C++ y están interconectados con MATLAB© a través de memoria compartida.

El controlador cinemático y el compensador dinámico están programados en MATLAB. Los parámetros utilizados en las simulaciones se describen en la Tabla 6-2. Cada partícula de masa de los cables se ve afectada por la fuerza elástica y viscosa fuerza elástica y viscosa generada por el resto de muelles y amortiguadores, la fuerza gravitacional, la fuerza de fricción del aire, la fuerza de arrastre y otras fuerzas relacionadas con el suelo (fricción, absorción y repulsión).

<b>Parámetro</b>	<b>Valor</b>
<i>Numero de cables</i>	2
<i>Numero de partículas de masa por cable</i>	40
<i>Masa de enlace del cable</i>	0.001 [kg]
<i>Diámetro del Cable</i>	0.0005 [m]
<i>Coefficiente de arrastre del cable</i>	1.0
<i>Masa de la carga útil</i>	0.4 [kg]
<i>Longitud del borde de la carga útil</i>	0.1 [m]
<i>Coefficiente de arrastre de la carga útil</i>	1.05
<i>Longitud del muelle</i>	0.08 [m]
<i>coeficiente de los resortes</i>	5000 [N/m]
<i>Fricción de los resortes</i>	0.6 [N · s/m]
<i>Aceleración de la gravedad</i>	9.7917 [m/s <sup>2</sup> ]
<i>Densidad del aire</i>	1.151 [kg/m <sup>3</sup> ]
<i>Fricción del aire</i>	0.02 [N · s/m]
<i>Repulsión del suelo</i>	100 [N/m]
<i>Fricción del suelo</i>	0.2 [N · s/m]
<i>Absorción del suelo</i>	0.05 [N · s/m]

Tabla 6-2: Parámetros de los cables y la carga

## 6.8. Resultados de simulación:

Para validar la estructura de control desarrollada en las secciones anteriores, se diseña un escenario de navegación con dos obstáculos situados en posiciones estratégicas, con el objetivo de activar el controlador de evasión de colisiones. La elección de la trayectoria de referencia para realizar la simulación de la carga es la lemniscata de la curva de Bernoulli definida como:

$$\xi_{\ell}(t) = \begin{pmatrix} R \cos(2\pi t/T) \\ R \sin(4\pi t/T) \\ 2 + 10 t/T \end{pmatrix} \quad (6-40)$$

con un tiempo total de simulación de  $T = 240$  segundos, siendo  $t$  el instante de simulación actual, y  $R$  el el radio de la trayectoria del lemnisco ascendente. Las ganancias del controlador cinemático de ganancias del controlador cinemático se han fijado en  $\mathbf{K}_{\ell,1} = \text{diag}(0,75 \ 0,75 \ 0,75)$ ,  $\mathbf{K}_{\ell,2} = \text{diag}(0,475 \ 0,475 \ 0,475)$ ,  $k_{\gamma_{1,1}} = 0,01$ ,  $k_{\gamma_{1,2}} = 0,75$ ,  $k_{\gamma_{2,1}} = 0,5$ ,  $k_{\gamma_{2,2}} = 0,75$ ,  $k_{\psi_{1,1}} = k_{\psi_{2,1}} = 0,5$ ,  $k_{\psi_{1,2}} = k_{\psi_{2,2}} = 0,75$ ,  $k_{d,1} = 0,5$  y  $k_{d,2} = 0,75$ . Los pesos de la RBF-NN se inicializados con números aleatorios  $\in (0, 1)$ . Después de iniciar Después de iniciar la simulación, estos valores se actualizan en cada tiempo de muestreo por la Ecuación (6-38) a lo largo de la ejecución de la tarea. De esta manera, el término neural calculado a través de la red permite mejorar

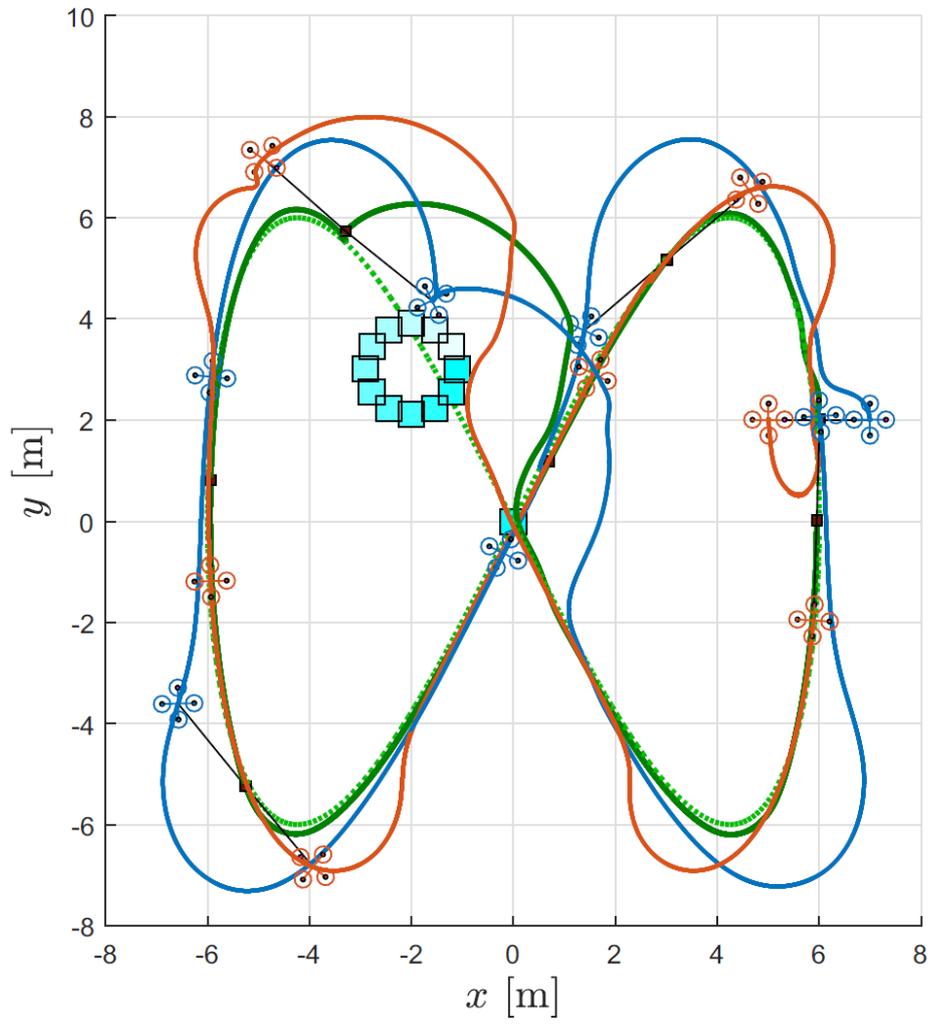
el rendimiento del sistema de control en línea. En las simulaciones se utilizan diez neuronas en la capa oculta.

La carga útil pesa  $400gr$  y este valor se decidió teniendo en cuenta la carga útil máxima de  $200gr$  especificada por el fabricante del Cuadricóptero adoptado. Por lo tanto, la carga útil no puede ser transportada por un solo Cuadricóptero.

Además, en el entorno de simulación se consideran dos obstáculos, el primero estático y el segundo dinámico. Sus posiciones vienen dadas por

$$\xi_{0,1}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad y \quad \xi_{0,2}(t) = \begin{pmatrix} R_2 \cos(20\pi t/T) \\ R_2 \sin(20\pi t/T) \\ 11 \end{pmatrix} \quad (6-41)$$

Donde  $R_2 = 0,9m.$  es el radio de la trayectoria seguida por el obstáculo. La figura 6-5 y figura 6-6 muestra la evolución del sistema aéreo con el controlador aquí propuesto. Además, muestra una vista superior y una vista en perspectiva de la navegación del entorno, respectivamente. De acuerdo con la definición de los objetivos de control presentados en la sección 6.2, la evitación de obstáculos es la tarea de máxima jerarquía. Así, esta tarea se cumple siempre y las restantes se consiguen cuando no hay obstáculos cerca. Por lo tanto, se observa que la formación se aleja de la trayectoria de referencia cuando los obstáculos están cerca de la carga o de los UAV. Así, en esos momentos se consigue la tarea de evitar la colisión, pero el resto de las tareas no se cumplen completamente.



— quadrotor 1 — quadrotor 2 — payload - - - - desired trajectory

figura 6-5: Vista superior del camino seguido por los vehículos y la carga:

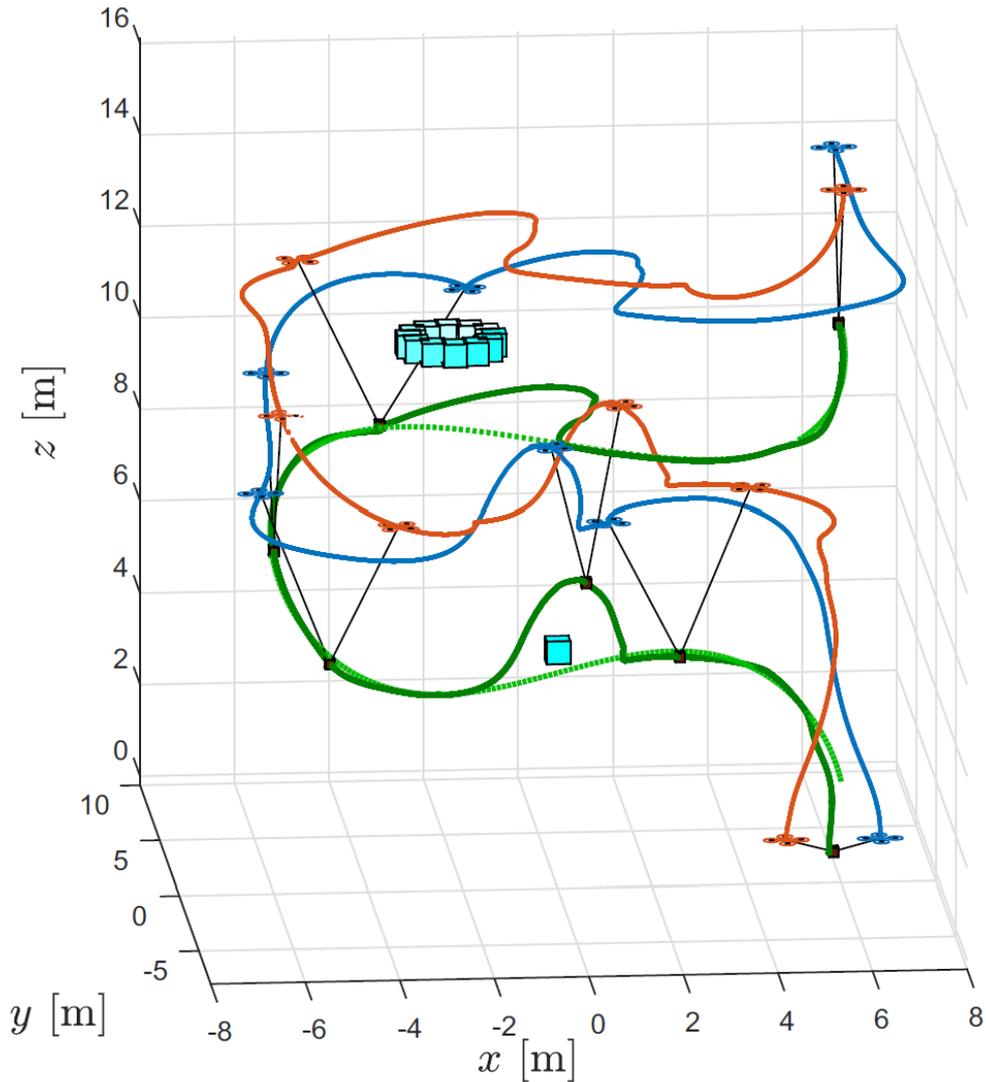


figura 6-6: Camino seguido por los vehículos y la carga en 3D.

La figura 6-7 presenta la evolución temporal de los cuatro errores de control del controlador de formación explicados en la sección 6.2. La primera subfigura muestra el campo potencial ficticio  $\mathcal{V}$  del controlador de evasión de colisiones presentado en [79], que es nulo en las zonas de navegación libre y es positivo en las zonas donde hay obstáculos.

Obsérvese que la formación se mantiene alejada de los obstáculos ya que  $\mathcal{V}$  es siempre cercano a cero. La segunda subfigura presenta la distancia entre los Cuadricópteros, el error de altitud y una curva que indica si el peso de la carga es adecuadamente distribuida. El intervalo de distancia deseado está definido por los valores mínimo y máximo  $d_m = 2$  y  $d_M = 4$ . Durante la simulación, la distancia se mantiene dentro de este intervalo. Además, la distribución del peso se definió al 50% para cada Cuadricóptero, de modo que  $\rho = 0,5$ . La figura 6-8 presenta el peso transportado por cada UAV. La tercera subfigura presenta los errores de seguimiento de la trayectoria para las posiciones  $\tilde{x}_\ell$  e  $\tilde{y}_\ell$ .

Se puede observar que los errores de seguimiento aumentan cuando el controlador actúa para evitar una colisión, ya que la evitación de colisiones tiene prioridad sobre el

seguimiento de la trayectoria. Por lo tanto, la evitación de colisiones está garantizada por el controlador de espacio nulo, mientras que la tarea de seguimiento de la trayectoria no lo está. Finalmente, en la última subfigura se muestran los errores de orientación para el ángulo de guiñada ( $\tilde{\psi}_1$  y  $\tilde{\psi}_2$ ) de cada Cuadricóptero. También se muestra el error de guiñada de la formación.

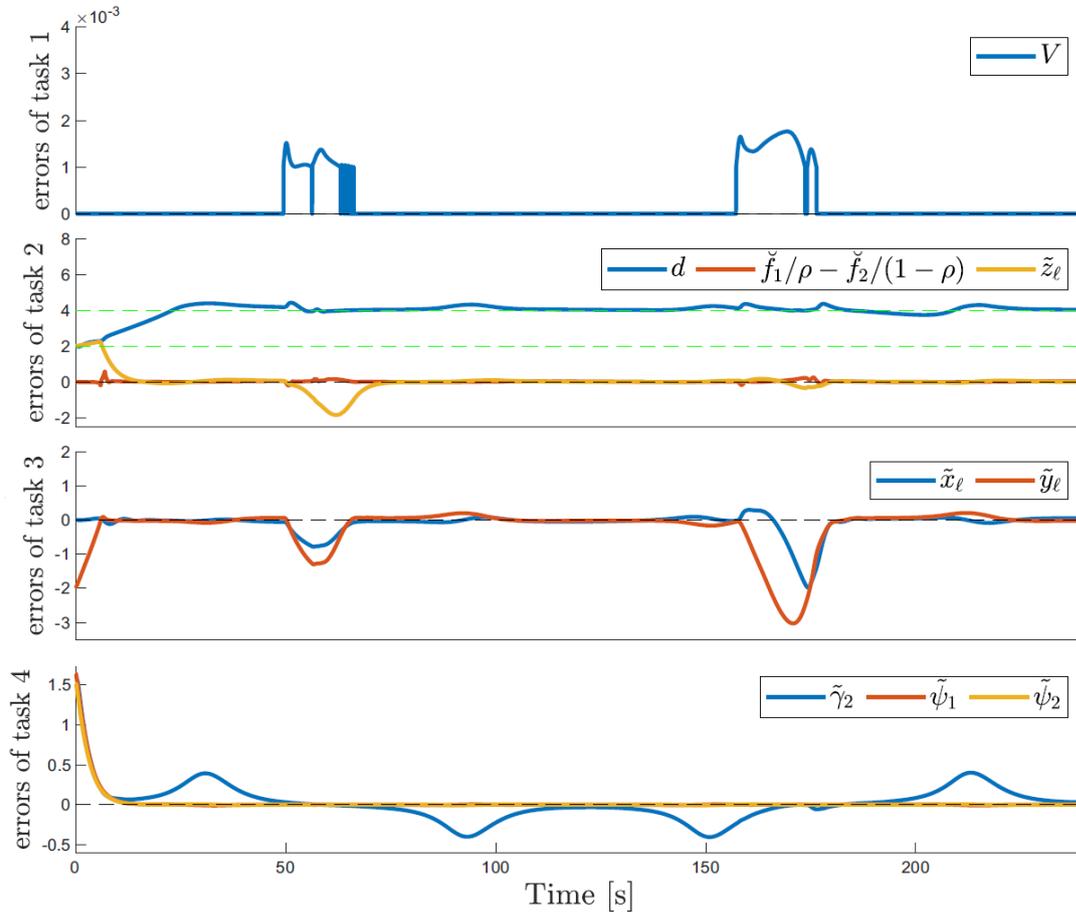


figura 6-7: Evolución temporal de los errores de formación

Dado que el ángulo de guiñada de cada UAV es independiente en las variables de formación definidas previamente en la sección 6.2, el cumplimiento de esta tarea no se ve afectado cuando se realizan tareas de evasión de obstáculos. Sin embargo, el ángulo de guiñada de la formación se modifica durante las maniobras para evitar colisiones. Por lo tanto, las ventajas del esquema de control de la formación basado en el espacio nulo propuesto aquí se observan claramente a través de las simulaciones descritas anteriormente.

En la figura 6-9 se comparan las referencias de velocidad y sus valores reales para las variables  $x$ ,  $y$  y  $z$ . Estos resultados se obtienen con el compensador dinámico. El problema del chattering del SMC se resuelve filtrando las acciones de control obtenidas por el controlador NA-SMC antes de enviarlas al Cuadricóptero. El filtro utilizado es un filtro de mediana donde se consideran las últimas 5 muestras de la acción de control, entonces, las acciones de control se envían a los Cuadricópteros. En consecuencia, para validar el controlador neural SMC, se repitió el mismo experimento se repitió, ahora sin considerar el compensador dinámico. Los errores de seguimiento de la velocidad para ambos casos fueron comparados en la figura 6-10. Los resultados obtenidos validan el

esquema de control propuesto. Se consigue un mejor seguimiento de la velocidad con el compensador dinámico y, por lo tanto, se puede obtener una se puede obtener una mejor navegación. La combinación del SMC y las redes neuronales permite obtener un controlador adaptativo con un buen rendimiento cuando la masa de la carga cambia y hay perturbaciones externas durante la navegación.

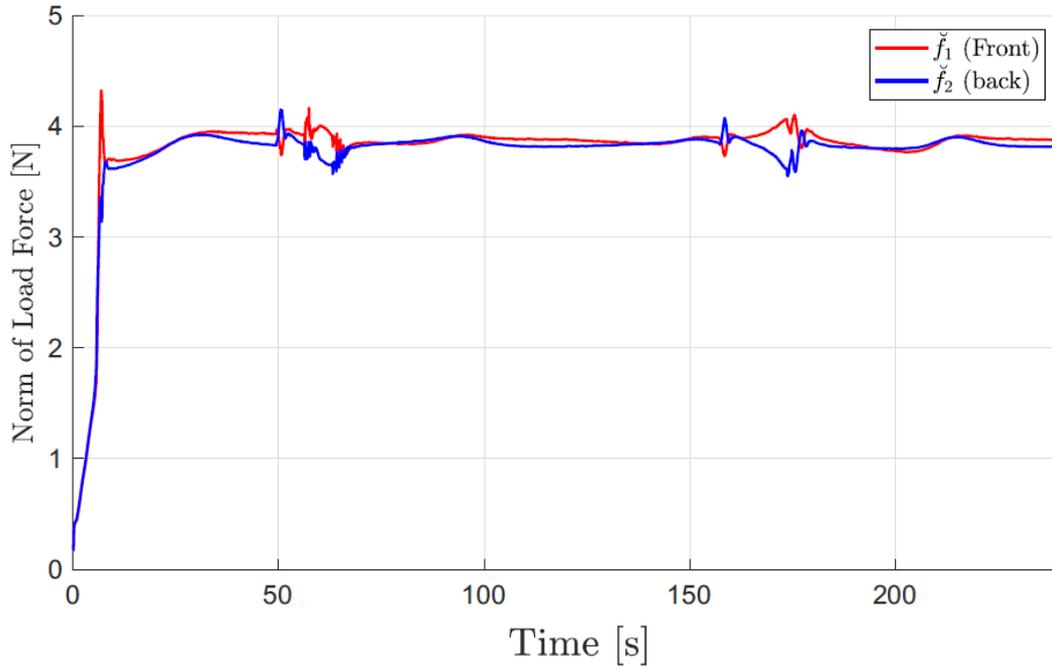


figura 6-8: Distribución de la fuerza de carga a lo largo de la simulación:

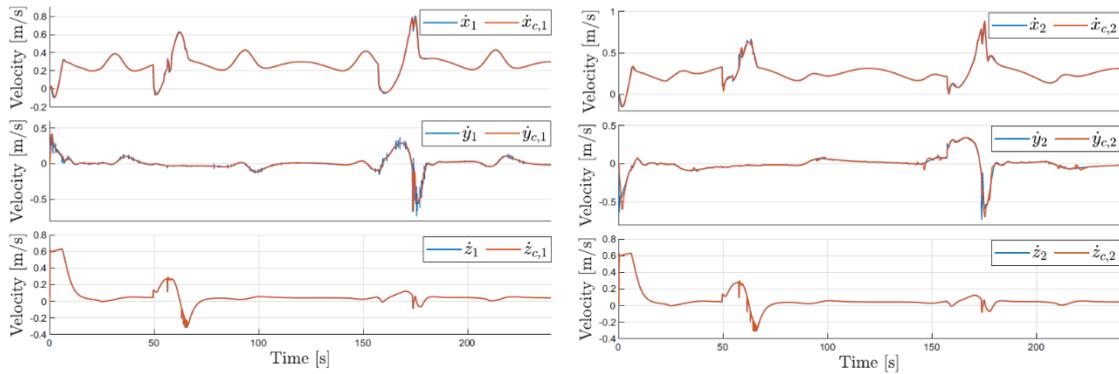


figura 6-9: a) y b) Referencias de velocidad calculadas por el controlador cinemático de la formación y las velocidades reales de cada UAV. Estos resultados se obtienen utilizando el compensador neural SMC

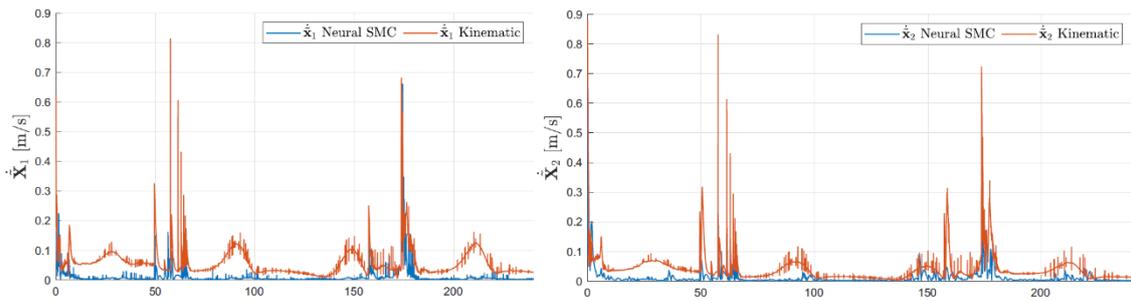


figura 6-10: Errores de seguimiento de la velocidad utilizando el compensador dinámico y sin utilizarlo. Se observa claramente cómo el controlador neural SMC disminuye los errores de seguimiento de la velocidad

## 6.9. Observaciones finales

Se presenta una estructura de control dinámico para el transporte de cargas con múltiples Cuadricópteros. Se implementa como una combinación entre un controlador cinemático de formación y compensadores dinámicos conectados en cascada con dicho controlador cinemático. El controlador de formación se basa en múltiples objetivos de control, y estas tareas se combinan de forma jerárquica en un controlador de espacio nulo. Además, se propone un novedoso compensador dinámico con un controlador neural de modo deslizante. El compensador dinámico está diseñado para disminuir los errores de velocidad entre las referencias de velocidad calculadas por el controlador cinemático de la formación y las velocidades reales de cada Cuadricóptero. Está formado por un controlador de modo deslizante y un término calculado por una red neuronal de función de base radial, que actualiza su peso en línea para reducir los errores de control. Se han realizado simulaciones numéricas en un entorno de navegación muy realista con un modelo dinámico muy preciso para los Cuadricópteros y los cables. Los resultados validan la propuesta y se demuestra que los errores de velocidad son menores con el compensador dinámico, por lo que se obtiene una mejor navegación de la formación.

## Capítulo 7. Conclusiones de la Tesis.

El desarrollo del controlador neuro-adaptable para la estimación de las variaciones dinámicas de los vehículos autónomos, que son tratados en esta tesis, permite minimizar el error de seguimiento de trayectorias, cuyas referencias son previamente definidas. En parte debido a una buena elección del vector regresor de los diferentes controles propuestos gracias a la manera en la que se relacionan sus variables de entrada y de salida. Es necesario indicar que existieron inconvenientes durante su diseño y puesta a punto, debido principalmente al tamaño de la red como así también a la selección de las variables del regresor, siendo estos los factores que determinan la efectividad del controlador propuesto. Que con la modificación de la estructura de la red, o la adición o sustracción de neuronas (como así también la conexión entre ellas), proporcionará respuestas diferentes dependiendo del escenario y del vehículo considerado. El controlador neuro-adaptable propuesto es optimizado basado en las reglas de ajuste, las cuales son función del error de control que fueron obtenidas de un análisis de estabilidad del sistema de control global. Esto implica que la técnica de control debe tener la capacidad de obtener resultados iguales o más significativos ante el seguimiento de trayectorias que impliquen geometrías muy distintas a las que se plantea en esta investigación. Como también la robustez del controlador ante perturbaciones externas, variaciones paramétricas y dinámicas no modeladas.

En los distintos capítulos considerados en esta tesis se presentaron distintos índices de comparación de los controladores propuestos con los existentes en la literatura científica de la temática. En los casos tratados se obtuvieron mejoras en el seguimiento de trayectorias reduciendo su error considerablemente. Este trabajo también presenta aportes en la aplicación de las técnicas de control neuro-adaptable en robótica colaborativa, como el caso de control de formación que impliquen transporte de cargas. La tesis también muestra resultados de simulación y resultados experimentales en algunos de los vehículos aquí tratados que validan la hipótesis planteada.

Con los resultados obtenidos en la presente tesis se demuestra que la aplicación de técnicas de control neuro adaptable, mediante el uso de técnicas basadas específicamente en redes neuronales (tanto RBFNN y GRNN), y en combinación de técnicas de control no-lineal permitió estimar las variaciones dinámicas de los vehículos autónomos tratados en los diferentes capítulos. Y por lo tanto se definió una ley de control que minimiza el error de trayectoria provocado por variaciones dinámicas. Que de esta forma se resuelve el problema planteado en la hipótesis de esta Tesis. La eficacia de los controladores propuesto en este proyecto, es determinada mediante la comparación de los errores obtenidos con respecto a los controladores presentes en la literatura científica. También se logró completar al objetivo general, que fue obtener algoritmos de control avanzados de control adaptable no lineal basados en NN, cuya estabilidad fue demostrada en cada capítulo para cada vehículo tratado. Acorde a este objetivo también se completaron los objetivos específicos, inclusive se obtuvo resultados favorables en el control de formación para dos vehículos autónomos.

### 7.1. Trabajos futuros

Si bien en esta tesis se llegó a demostrar la viabilidad de la compensación dinámica sobre dos vehículos autónomos aéreos para transporte de cargas, la aplicación de estas técnicas sobre formación multi vehículo es un área de investigación de importancia. Inclusive entre vehículos de diferente naturaleza (formación UAV-UGV o UAV-USV), cuyo campo de aplicación es variado (transporte de cargas, vigilancia, defensa etc.). Donde

estas temáticas pueden generar nuevas líneas de investigación tanto en el área de la robótica como el de control inteligente.

## 7.2. Difusión de los principales aportes de esta tesis

Con los resultados de esta temática de investigación se publicó un artículo en congreso internacional y cinco publicaciones en revista internacionales con referato. La lista de los trabajos se detalla a continuación:

- **F. Rossomando**, C. Soria, and Carelli R.. “Sliding Mode Neuro Adaptive Control in Trajectory Tracking for Mobile Robots”, *Journal of Intelligent and Robotic Systems*: Volume 74, Issue 3 (2014), Page 931-944 ISSN: 0921-0296, editorial Springer, <https://doi.org/10.1007/s10846-013-9843-5>
- **F. Rossomando**, C. Soria, and Carelli R.. “Sliding Mode Control for Trajectory Tracking of a Non-holonomic Mobile Robot using Adaptive Neural Networks” *Journal of Control Engineering and Applied Informatics*, ISSN 1454-8658 , Vol 16, No 1 (2014), pp12-21. <http://ceai.srait.ro/index.php?journal=ceai&page=article&op=view&path%5B%5D=1575&path%5B%5D=0>
- **Francisco G. Rossomando**, Carlos Soria, “Identification and control of nonlinear dynamics of a mobile robot in discrete time using an Adaptive technique based on Neural PID”, *Neural Computing and Applications (NCAA)* ISSN: 0941-0643, editorial Springer, July 2015, Volume 26, Issue 5, pp 1179-1191, (2015). <https://doi.org/10.1007/s00521-014-1805-8>
- **F. Rossomando**, C. Rosales, C. Soria, D. Gandolfo and R. Carelli,(2021) "Adaptive tracking control for a UAV with neural adaptive compensation using SMC," *International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, 2021, pp. 1218-1224, <https://doi: 10.1109/ICUAS51884.2021.9476823>.
- Capraro, F., **Rossomando, F. G.**, Soria, C., & Scaglia, G. (2017). Cascade sliding control for trajectory tracking of a nonholonomic mobile robot with adaptive neural compensator. *Mathematical Problems in Engineering*. <https://doi.org/10.1155/2017/8501098>
- **Rossomando, F. G.**, Soria, C., Freire, E. O., & Carelli, R. O. (2018). Sliding mode neuro-adaptive controller designed in discrete time for mobile robots. *Mechatronic Systems and Control (formerly Control and Intelligent Systems)*, 46(2). <https://doi.org/10.2316/Journal.201.2018.2.201-2792>
- **Rossomando, F.**, Serrano, E., & Scaglia, G. (2021). Trajectory tracking control of Autonomous Marine Vessel using Neuro-Adaptive Sliding Mode Control. *IEEE Latin America Transactions*, 19(5), 763-771. <https://doi.org/10.1109/TLA.2021.9448310>
- Lopez-Sanchez, I., **Rossomando, F.**, Pérez-Alcocer, R., Soria, C., Carelli, R., & Moreno-Valenzuela, J. (2021). Adaptive trajectory tracking control for quadrotors with disturbances by using generalized regression neural networks. *Neurocomputing*, 460, 243-255., <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2021.06.079>.

- **Rossomando, F.**, Rosales, C., Gimenez, J., Salinas, L., Soria, C., Sarcinelli-Filho, M., & Carelli, R. (2020). Aerial load transportation with multiple quadrotors based on a kinematic controller and a neural SMC dynamic compensation. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 100(2), 519-530.. <https://doi.org/10.1007/s10846-020-01195-z>

## Referencias

- [1]. National Institute of Standards and Technology Special Publication 1011. Autonomy Levels for Unmanned Systems (ALFUS) Framework, Volume I: Terminology, Version 1.1. September 2004. Available online: (accessed on 1 December 2020).
- [2]. Electronics Maker, Unmanned Vehicles—No pilot/driver on Board. 5 August 2014. Available online: (accessed on 1 December 2020).
- [3]. Daponte, P.; De Vito, L.; Mazzilli, G.; Picariello, F.; Rapuano, S.; Riccio, M. Metrology for drone and drone for metrology: Measurement systems on small civilian drones. In Proceedings of the 2015 IEEE Metrology for Aerospace (MetroAeroSpace), Benevento, Italy, 4–5 June 2015; pp. 306–311.
- [4]. Narayanan, A.; Rajeshirke, P.; Sharma, A.; Pestonjamas, K. Survey of the emerging bio-inspired Unmanned Aerial Underwater Vehicles. In Proceedings of the 2nd International Conference on Emerging trends in Manufacturing, Engines and Modelling (ICEMEM -2019), Mumbai, India, 23–24 December 2019; Volume 810.
- [5]. Sándor, Z. Challenges Caused by the Unmanned Aerial Vehicle in the Air Traffic Management. *Period. Polytech. Transp. Eng.* 2017, 47, 96–105.
- [6]. Shakhathreh, H.; Sawalmeh, A.H.; Al-Fuqaha, A.; Dou, Z.; Almaita, E.; Khalil, I.; Othman, N.S.; Khreishah, A.; Guizani, M. Unmanned Aerial Vehicles (UAVs): A Survey on Civil Applications and Key Research Challenges. *IEEE Access* 2019, 7, 48572–48634.
- [7]. Dilipraj, E. Technologies: Pragmatic Role of Robotics, 3D Printing and Supercomputers in Future Wars. In *Asian Defence Review 2016*; Knowledge World Publishers: New Delhi, India, 2016; ISBN 978-9383-649-90-7.
- [8]. Odedra, S. Using unmanned ground vehicle performance measurements as a unique method of terrain classification. In Proceedings of the 2011 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, San Francisco, CA, USA, 25–30 September 2011; pp. 286–291.
- [9]. Philips, A. Air- and Ground- Based Autonomous Vehicles Working Together, *Dronelife.com*. October 2014. Available online: (accessed on 1 December 2020).
- [10]. Ilaş, C. Electronic sensing technologies for autonomous ground vehicles: A review. In Proceedings of the 8th International Symposium on Advanced Topics in Electrical Engineering (ATEE), Bucharest, Romania, 23–25 May 2013; pp. 1–6.
- [11]. Autonomous and Unmanned Surface Vessels for Marine Monitoring, Surveying and Rescue. Available online: (accessed on 1 December 2020).
- [12]. Vasudev, K.L. Review of Autonomous Underwater Vehicles. In *Autonomous Vehicles*; Dekoulis, G., Ed.; IntechOpen: London, UK, 2020; ISBN 978-1-83968-191-2.
- [13]. Heo, J.; Kim, J.; Kwon, Y. Technology Development of Unmanned Underwater Vehicles (UUVs). *J. Comput. Commun.* 2017, 5, 28–35.
- [14]. Ho, G.; Pavlovic, N.; Arrabito, R. Human Factors Issues with Operating Unmanned Underwater Vehicles. *Proc. Hum. Factors Ergon. Soc. Ann. Meet.* 2011, 55, 429–433.
- [15]. Bao-Li M., “Global k-exponential asymptotic stabilization of underactuated surface vessels,” *Syst. Control Lett.*, vol. 58, no. 3, pp. 194–201, Mar. 2009.
- [16]. Do K. D., Jiang Z. P., and Pan J., “Robust global stabilization of underactuated ships on a linear course: State and output feedback,” in *Proc. Process. Amer. Control Conf.*, 2002, pp. 1687–1692.

- [17]. Do K.D., Jiang Z. P., and Pan J., “Universal controllers for stabilization and tracking of underactuated ships,” *Syst. Control Lett.*, vol. 47, no. 4, pp. 299–317, Nov. 2002.
- [18]. Ghommam J., Mnif F., Benali A., and Derbel N., “Asymptotic backstepping stabilization of an underactuated surface vessel,” *IEEE Trans. Control Syst. Technol.*, vol. 14, no. 6, pp. 1150–1157, Nov. 2006.
- [19]. Godhavn J.M., Fossen T.I., Berge S.P. (1998). ‘Nonlinear adaptive backstepping designs for tracking control of ships’. *Int. J. Adapt. Control Signal Process.* 1998, 12, pp. 649–670.
- [20]. Jiang Z.P., Nijmeijer H. (1997). ‘Tracking control of mobile robots: a case study in backstepping’. *Automatica*, 1997, 33, pp. 1393–1399.
- [21]. Jiang Z. P., “Global tracking control of underactuated ships by Lyapunov’s direct method,” *Automatica*, vol. 38, no. 2, pp. 301–309, Feb. 2002.
- [22]. Lapiere L. and Jouvencel B., “Robust nonlinear path-following control of an AUV,” *IEEE J. Ocean. Eng.*, vol. 33, no. 2, pp. 89–102, Apr. 2008.
- [23]. LeCun Y., Bengio Y., and G. Hinton G., “Deep learning,” *Nature*, vol. 521, pp. 436–444, May 2015.
- [24]. Rosales A., Scaglia G., Mut V. and di Sciascio F. (2009). Trajectory tracking of mobile robots in dynamic environments—a linear algebra approach. *Robotica*, Volume 27 , Issue 07 , Dec 2009 , pp 981-997 doi: 10.1017/S0263574709005402, Published online by Cambridge University Press 26 Feb 2009.
- [25]. Rosales A., Scaglia G., Mut V., di Sciascio F. (2009). Navegación de Robots Móviles en Entornos no Estructurados utilizando Álgebra Lineal. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, ISSN 1697-7912, vol 6 N° 2, pp 79-88.
- [26]. Rosales, C., Soria, C. M., & **Rossomando**, F. G. (2019). Identification and adaptive PID Control of a hexacopter UAV based on neural networks. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 33(1), 74-91.
- [27]. Rosales Claudio, Leica Paulo, Sarcinelli-Filho Mario, Scaglia Gustavo, Carelli Ricardo, (2016), 3D Formation Control of Autonomous Vehicles Based on Null-Space. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, pp 1-15, ISSN 0921-0296.
- [28]. Rosales C., Gandolfo D., Scaglia G., Jordan M., Carelli R.. Trajectory tracking of a mini four-rotor helicopter in dynamic environments - a linear algebra approach. *Robotica*. doi:10.1017/S0263574714000952. ISSN: 0263-5747. *Robotica/ Volume 33 / Issue 08 / October 2015*, pp. 1628-1652.
- [29]. **Rossomando** F. G., Soria C., Carelli R.. “Autonomous Mobile Robot Navigation using RBF Neural Compensator”, *Control Engineering Practice*, ISSN 0967-0661, Vol.19, N°3, pp. 215–222, editorial Elsevier. DOI: 10.1016/j.conengprac.(2010).11.011.
- [30]. **Rossomando** F. G., Soria C., Carelli R.. “Adaptive Neural Sliding Mode Compensator for a class of Nonlinear Systems with Unmodeled Uncertainties” *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, editorial Elsevier, ISSN: 0952-1976, Vol.26, serie 10, pp. 2251-2259. DOI:10.1016/j.engappai.2013.08.008 (2013).
- [31]. **Rossomando** F. G., Soria C., Carelli R. “Sliding Mode Neuro Adaptive Control in Trajectory Tracking for Mobile Robots”, *Journal of Intelligent and Robotic Systems: Volume 74, Issue 3 (2014)*, Page 931-944 ISSN: 0921-0296, editorial Springer, DOI: 10.1007/s10846-013-9843-5.

- [32]. **Rossomando**, F. G., & Soria, C. M. Identification and control of nonlinear dynamics of a mobile robot in discrete time using an adaptive technique based on neural PID. *Neural Computing and Applications*, 26(5), 1179-1191, (2015).
- [33]. **Rossomando** F. G., Soria C.. "Discrete Time Sliding Mode Neuro Adaptive Controller for SCARA Robot Arm", *Neural Computing and Applications (NCAA)* ISSN: 0941-0643, editorial Springer (2016), DOI: 10.1007/s00521-016-2242-7.
- [34]. Scaglia G., Quintero O. L., Mut V., di Sciascio F. (2009). "Numerical Methods Based Controller Design for Mobile Robots". *Robotica*, Volume 27, Issue 02, Mar 2009, pp 269-279 doi: 10.1017/S0263574708004669, Published online by Cambridge University Press 23 Jun 2008 ISSN 0263-5747.
- [35]. Scaglia G., Rosales A., Quintero L., Mut V., Agarwal R. (2010). "A Linear-Interpolation-based Controller Design for trajectory Tracking of Mobile Robots". *Control Engineering Practice*, vol. 18 (2010), Volume 18, Issue 3, March 2010, Pages 318–329 ISSN: 0967-0661.
- [36]. Scaglia G. J. E., Serrano E., Rosales A., Albertos P., Linear interpolation based controller design for trajectory tracking under uncertainties: Application to mobile robots, *Control Engineering Practice*, Volume 45, December 2015, pp. 123-132, ISSN 0967-0661, <http://dx.doi.org/10.1016/j.conengprac.2015.09.010>.
- [37]. Scaglia G. J. E., Vicente A. Mut, Mario Jordan, Carlos Calvo, Lucia Quintero (2009). "MOBILE ROBOT CONTROL BASED ON ROBUST CONTROL TECHNIQUES", *Journal of Engineering Mathematics* Volume 63 Number 1, DOI 10.1007/s10665-008-9252-0, enero 2009, page 17-32, ISSN 0022-0833 (Print) 1573-2703 (Online), Editor Springer Netherlands
- [38]. Serrano Mario E., Godoy Sebastián A., Rómoli Santiago and Scaglia Gustavo J.E. (2017). "A Numerical Approximation-Based Controller for Mobile Robots with Velocity Limitation." *ASIAN JOURNAL OF CONTROL*. Version of Record online : 11 APR 2017, DOI: 10.1002/asjc.1522. ISSN 1934-6093.
- [39]. Serrano, M.E., Godoy, S.A., Quintero, L., Gustavo J. E. Scaglia (2016). Interpolation Based Controller for Trajectory Tracking in Mobile Robots. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*. doi:10.1007/s10846-016-0422-4. ISSN 0921-0296.
- [40]. Serrano M. E., Godoy S., Mut V., Ortiz O., Scaglia G.. "A nonlinear trajectory tracking controller for mobile robots with velocity limitation via parameters regulation". *Robotica Cambridge University*, doi:10.1017/S026357471500020X.
- [41]. Serrano, M. E., Scaglia, G. J., Godoy, S. A., Mut, V., & Ortiz, O. A. (2013). Trajectory tracking of underactuated surface vessels: A linear algebra approach. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 22(3), 1103-1111.
- [42]. Serrano M. E., Scaglia G., Auat Cheein F., Mut V. and Ortiz O. (2015). Trajectory-tracking controller design with constraints in the control signals: a case study in mobile robots. *Robotica*, 33, pp 2186-2203, diciembre 2015. doi:10.1017/S0263574714001325.
- [43]. Serrano M. E., Scaglia G. J.E., Mut V., Ortiz O.A., Jordan M., (2013), "Linear Algebra Based Controller Design: a case study in Underactuated Surface Vessels", *Control Engineering and Applied Informatics Journal*. Vol.15, No.4 pp. 15-25, 2013. ISSN 1454-8658.
- [44]. Serrano M. E., Godoy Bordes S. A., Gandolfo D., Mut V. A., & Scaglia G. J. E. . "Nonlinear Trajectory Tracking Control for Marine Vessels with Additive Uncertainties" 2018.
- [45]. Schmidhuber J., "Deep learning in neural networks: An overview," *Neural Netw.*, vol. 61, pp. 85–117, Jan. 2015.

- [46]. Shima, T., & Rasmussen, S. (Eds.). (2009). UAV cooperative decision and control: challenges and practical approaches. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [47]. Tee K. P. and Ge S. S., "Control of fully actuated ocean surface vessels using a class of feedforward approximators control of fully actuated ocean surface vessels using a class of feedforward approximators," *IEEE Trans. Control Syst. Technol.*, vol. 14, no. 4, pp. 750–756, Jul. 2006.
- [48]. Vepa, R. (2016). *Nonlinear Control of Robots and Unmanned Aerial Vehicles: An Integrated Approach*. CRC-Press.
- [49]. Wondergem M., Lefeber E., Pettersen K. Y., and Nijmeijer H., "Output feedback tracking of ships," *IEEE Trans. Control Syst. Technol.*, vol. 19, no. 2, pp. 442–448, Mar. 2011.
- [50]. Yu-Lei L., Lei W., and Jia-Yuan Z., "Backstepping dynamical sliding mode control method for the path following of the underactuated surface vessel," *Procedia Eng.*, vol. 15, pp. 256–263, Dec. 2011.
- [51]. Zheng, Z., & Sun, L. (2016). Path following control for marine surface vessel with uncertainties and input saturation. *Neurocomputing*, 177, 158-167.
- [52]. Isidori A. *Nonlinear control systems II*. Springer-Verlag, 1999.
- [53]. Slotine, J.-J.E., and W. Li. 1991. *Applied Nonlinear Control*. Upper Saddle River: Prentice Hall.
- [54]. Hung, L.C., Chung, H.Y.: Decoupled control using neural network-based sliding-mode controller for nonlinear systems. *Expert Syst. Appl. Elsevier* **32**, 1168–1182 (2007)
- [55]. Sastry, S. 1999. *Nonlinear Systems*. New York: Springer.
- [56]. Zinober, A.S.I., ed. (1990). *Deterministic control of uncertain systems*. London: Peter Peregrinus Press. ISBN 978-0-86341-170-0.
- [57]. Utkin, Vadim I. (1993). "Sliding Mode Control Design Principles and Applications to Electric Drives". *IEEE Transactions on Industrial Electronics*. 40 (1): 23–36.
- [58]. Utkin, Vadim I. *Variable Structure systems with Sliding Modes*. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 22, 2, 212-222, 1977.
- [59]. Hung J. Y, Gao W., and Hung J.C, "Variable Structure Control: A Survey", *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, vol. 40, No. 1, Feb. 1993
- [60]. Slotine, J. J. E., & Li, W. (1991). *Applied nonlinear control* (Vol. 199, No. 1, p. 705). Englewood Cliffs, NJ: Prentice hall.
- [61]. Specht, D. F. (1991). A general regression neural network. *IEEE transactions on neural networks*, 2(6), 568-576.
- [62]. Chen T., Chen H., Approximations of continuous functionals by neural networks with application to dynamic systems, *IEEE Transactions on Neural Networks* 4 (6) (1993) 910–918.
- [63]. Haykin S., *Neural Networks: A Comprehensive Foundation*, Prentice Hall, NJ 1999.
- [64]. Liu Y.J., Li S., Tong S., and Chen C.L.P., Neural approximation-based adaptive control for a class of nonlinear nonstrict feedback discrete-time systems, *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 99, 1–11 doi:10.1109/TNNLS.2016.2531089.
- [65]. Park J., Sandberg I., *Neural Networks* 1993, 3, 246.
- [66]. Hornik K. Multilayer feedforward networks are universal approximators. *Neural Networks*, 2:359–366, 1989.
- [67]. Norgaard M., O. Ravn O., Poulsen N., and Hansen L.. *Neural Networks for Modelling and Control of Dynamic System*. Springer-Verlag, London, UK, 2000.

- [68]. De La Cruz, C., Carelli, R.: ‘Dynamic modeling and centralized formation control of mobile robots’. 32nd Annual Conf. on IEEE Industrial Electronics Society IECON, Paris, 2006
- [69]. Cyhenko, G.: ‘Approximation by superpositions of a sigmoidal function’, *Math. Control Signal, Syst.*, 1989, 2, pp. 303–31420
- [70]. Martins, F.N., Celeste, W.C., Carelli, R., Sarcinelli Filho, M., Bastos Filho, T.F.: ‘An adaptive dynamic controller for autonomous mobile robot trajectory tracking’, *Control Eng. Pract.*, 2008, 16, pp. 1354–1363.
- [71]. Yang Y., Du J., Liu H., Guo C., & Abraham A., (2013). ”A trajectory tracking robust controller of surface vessels with disturbance uncertainties”. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 22(4), 1511-1518, 2013
- [72]. Pierson W., Peteherych S., & Wilkerson J., ”The winds of the comparison data set for the Seasat Gulf of Alaska Experiment”. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 5(2), 169-176, 1980
- [73]. Astrom K.J. and Hagglund T., *PID Controllers: theory, design, and tuning*, Instrument Society of America, Research Triangle Park, NC, 2nd edition, 1995.
- [74]. Shtessel Y., Edwards C., Fridman L., Levant A., “Introduction: Intuitive Theory of Sliding Mode Control” en *Sliding mode Control and Observation*, Ed. Birkhäuser, 2014.
- [75]. Camacho, O., Rojas, R., & García-Gabín, W. (2007). Some long time delay sliding mode control approaches. *ISA transactions*, 46(1), 95-101.
- [76]. Santana L. V., Brandao A. S., Sarcinelli-Filho M., Carelli R., A trajectory tracking and 3D positioning controller for the AR.Drone quadrotor, in: *Proc. Int. Conf. on Unmanned Aircraft Systems*, 2014, pp. 756–767.
- [77]. Perez-Alcocer R., Moreno-Valenzuela J., Adaptive control for quadrotor trajectory tracking with accurate parametrization, *IEEE Access* 7 (2019) 53236–53247.
- [78]. Santos M. C., Santana L. V., Martins M. M., Brandao A. S., Sarcinelli-Filho M., Estimating and controlling UAV position using RGB-D/IMU data fusion with decentralized information/Kalman filter, in: *Proc. 2015 IEEE Int. Conf. on Industrial Technology*, pp. 232–239.
- [79]. Santos M. C. P., Rosales C. D., Sarcinelli-Filho M., Carelli R., A novel nullspace-based UAV trajectory tracking controller with collision avoidance, *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* 22 (6) (2017) 2543–2553.
- [80]. Santos M. C. P., Rosales C. D., Sarapura J. A., Sarcinelli-Filho M., Carelli R., An adaptive dynamic controller for quadrotor to perform trajectory tracking tasks, *Journal of Intelligent & Robotic Systems* 93 (1-2) (2019) 5–16.
- [81]. F. Kendoul, Z. Yu, K. Nonami, Guidance and nonlinear control system for autonomous flight of minirotorcraft unmanned aerial vehicles, *Journal of Field Robotics* 27 (3) (2010) 311–334.
- [82]. Carrillo L. R. G., Lopez A. E. D., Lozano R., Pegard C., *Quad rotorcraft control: vision-based hovering and navigation*, Springer-Verlag, London, UK, 2012.
- [83]. Bouadi H., Tadjine M., Nonlinear observer design and sliding mode control of four rotors helicopter, *Int. Journal of Mechanical, Aerospace, Industrial, Mechatronic and Manufacturing Engineering* 1 (7) (2007) 354–359.
- [84]. Bouadi H., Bouchoucha M., Tadjine M., Sliding mode control based on backstepping approach for an UAV type-quadrotor, *World Academy of Science, Engineering and Technology* 26 (5) (2007) 22–27.
- [85]. Luukkonen T., *Modelling and control of quadcopter* (Aalto University, Espoo, Finland, Int. Rep. 22, 2011).

- [86]. Bangura M., Mahony R., Nonlinear dynamic modeling for high performance control of a quadrotor, in: Proc. Australasian Conf. on Robotics and Automation, 2012, pp. 115–124.
- [87]. Von asek K. T, V., Fiser D., Faigl J., AR-Drone as a robotic platform for research and education, in: Proc. Int. Conf. on Research and Education in Robotics, 2011, pp. 1–15.
- [88]. Engel J., Sturm J., Cremers D., Camera-based navigation of a low-cost quadrocopter, in: Proc. IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems, 2012, pp. 2815–2821.
- [89]. Hernandez A., Copot C., De Keyser R., Vlas T., Nasco I., Identification and path following control of an AR.Drone quadrotor, in: Proc. 17th Int. Conf. on System Theory, Control and Computing, 2013, pp. 583–588.
- [90]. Falcon P., Barreiro A., Cacho M. D., Modeling of Parrot Ardrone and passivity-based reset control, in: Proc. 9th Asian Control Conf., 2013, pp. 1–6.
- [91]. Santana L. V., Brandao A. S., Sarcinelli-Filho M., Navigation and cooperative control using the AR.Drone quadrotor, *Journal of Intelligent & Robotic Systems* 84 (1-4) (2016) 327–350.
- [92]. Santos M. C., Sarcinelli-Filho M., Carelli R., Trajectory tracking for UAV with saturation of velocities, in: Proc. Int. Conf. on Unmanned Aircraft Systems, 2016, pp. 643–648.
- [93]. Rosales C. D., Tosetti S. R., Soria C. M., **Rossomando F. G.**, Neural adaptive PID control of a quadrotor using EFK, *IEEE Latin America Transactions* 16 (11) (2018) 2722–2730.
- [94]. Rosales C., Gimenez J., **Rossomando F.**, Soria C., Sarcinelli-Filho M., Carelli R., UAVs formation control with dynamic compensation using neuro adaptive SMC, in: Int. Conf. on Unmanned Aircraft Systems, 2019, pp. 93–99.
- [95]. **Rossomando F.**, Rosales C., Gimenez J., Salinas L., Soria C., Sarcinelli-Filho M., Carelli R., Aerial load transportation with multiple quadrotors based on a kinematic controller and a neural SMC dynamic compensation, *Journal of Intelligent & Robotic Systems* (2020).
- [96]. Sarapura J. A., Roberti F, Toibero J. M., Sebastian J. M., Carelli R., Visual servo controllers for an UAV tracking vegetal paths, in: *Machine Vision and Navigation*, Springer, Cham, Switzerland, 2020, pp. 597–625.
- [97]. Capraro F., **Rossomando F. G.**, Soria C., Scaglia G., Cascade sliding control for trajectory tracking of a nonholonomic mobile robot with adaptive neural compensator, *Mathematical Problems in Engineering* 2017 (2017) 1–13.
- [98]. Chen T., Chen H., Approximations of continuous functionals by neural networks with application to dynamic systems, *IEEE Transactions on Neural Networks* 4 (6) (1993) 910–918.
- [99]. Lewis F. L., Campos J., Selmic R., *Neuro-fuzzy control of industrial systems with actuator nonlinearities*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 2002.
- [100]. Liu Z., Chen C. P., Broad learning system: Structural extensions on singlelayer and multi-layer neural networks, in: Proc. Int. Conf. on Security, Pattern Analysis, and Cybernetics, 2017, pp. 136–141.
- [101]. Feemster M. G., Fang Y., Dawson D. M., Disturbance rejection for a magnetic levitation system, *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* 11 (6) (2006) 709–717.
- [102]. Li S., Wang Y., Tan J., Zheng Y., Adaptive RBFNNs/integral sliding mode control for a quadrotor aircraft, *Neurocomputing* 216 (2016) 126–134.

- [103]. Seng T. L., Khalid M., Yusof R., Adaptive GRNN for the modelling of dynamic plants, in: Proc. IEEE International Symp. on Intelligent Control, 2002, pp. 217–222.
- [104]. Polat O., Yıldırım T., Genetic optimization of GRNN for pattern recognition without feature extraction, *Expert Systems with Applications* 34 (4) (2008) 2444–2448.
- [105]. Li H.-Z., Guo S., Li C.-J., Sun J.-Q., A hybrid annual power load forecasting model based on generalized regression neural network with fruit fly optimization algorithm, *Knowledge-Based Systems* 37 (2013) 378–387.
- [106]. Al-Mahasneh A. J., Anavatti S. G., Garratt M. A., Altitude identification and intelligent control of a flapping wing micro aerial vehicle using modified generalized regression neural networks, in: Proc. IEEE Symp. Series on Computational Intelligence, 2017, pp. 1–6.
- [107]. Gimenez, J., Gandolfo, D., Salinas, L., Rosales, C., Carelli, R.: Multi-objective control for cooperative payload transport with rotorcraft uavs. *ISA Trans.* 80, 491–502 (2018)
- [108]. Powers, C., Mellinger, D., Kumar, V.: Quadrotor kinematics and dynamics. *Handbook of Unmanned Aerial Vehicles*, 307–328 (2015)
- [109]. Santos, M.C., Santana, L.V., Brandao, A.S., Sarcinelli-Filho, M., Carelli, R.: Indoor low-cost localization system for controlling aerial robots. *Control. Eng. Pract.* 61, 93–111 (2017)
- [110]. Mellinger M.N., Lindsey D., Kumar Q.: The grasp multiple micro-uav testbed. *IEEE Robot. Autom. Mag.* 17(3), 56–65 (2010)
- [111]. Rosales, C., Soria, C., Carelli, R., Rossomando, F.: Adaptive dynamic control of a quadrotor for trajectory tracking. In: 2017 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS), pp. 547–553. IEEE (2017)
- [112]. Vt, S.E., Shin, Y.C.: Radial basis function neural network for approximation and estimation of nonlinear stochastic dynamic systems. *IEEE Trans. Neural Netw.* 5(4), 594–603 (1994)

## Apéndice I: Control Basado en el Espacio Nulo

Normalmente cuando una misión involucra uno o varios robots que deben cumplir un número de tareas al mismo tiempo. Un enfoque común es resolver cada una de forma individual, y finalmente combinar las salidas de cada tarea y generar los comandos para los robots. El control basado en espacio nulo se deriva de la solución de cinemática inversa de los manipuladores industriales. Un sistema redundante, tiene infinitas soluciones para un mismo objetivo, y de esta manera es posible introducir objetivos de control secundarios en el espacio nulo.

Se definen  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^m$  como el conjunto de variables que deben controlarse, y  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  como las variables que representan las posiciones de los vehículos aéreos. Para una formación de 3 vehículos aéreos  $n = 9$ . La relación entre ambos esta dado por

$$\mathbf{q} = f(\mathbf{x}) \quad (7-1)$$

con su correspondiente relación diferencial,

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = J(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{x}} \quad (7-2)$$

donde  $J(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  es la matriz Jacobiana asociada a la tarea, que relaciona las velocidades de los robots con las velocidades de las tareas. Una forma efectiva de generar una referencia de movimiento para cada robot ( $\mathbf{x}_d(t)$ ) de un valor deseado de variables de la tarea ( $\mathbf{q}_d(t)$ ), es invirtiendo la relación cinemática (7-2). Un requerimiento típico es encontrar la solución de mínima norma, que se obtiene mediante la solución de mínimos cuadrados

$$\dot{\mathbf{x}}_d = J^\dagger \dot{\mathbf{q}}_d = J^\dagger (JJ^T) \dot{\mathbf{q}}_d \quad (7-3)$$

donde  $J^\dagger$  es la matriz pseudo-inversa del Jacobiano. Las referencias de posición pueden obtenerse integrando  $\dot{\mathbf{x}}_d$  en (7-3) y utilizando el algoritmo de cinemática inversa de lazo cerrado.

$$\dot{\mathbf{x}}_d = J^\dagger (\dot{\mathbf{q}}_d + \Lambda \tilde{\mathbf{q}}) \quad (7-4)$$

$\Lambda$  es una matriz diagonal de ganancias positivas que sirve para ajustar la respuesta, y  $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q}$  es el error de la tarea. El problema de competencia entre cada una de las tareas se soluciona proyectando las diferentes velocidades en el espacio nulo creado por la matriz Jacobiana de la tarea de mayor jerarquía. Primero es necesario calcular la velocidad deseada para cada sub-tarea,

$$\dot{\mathbf{x}}_{id} = J_i^\dagger (\dot{\mathbf{q}}_{id} + \lambda_i \tilde{\mathbf{q}}_i) \quad (7-5)$$

$i$  denota la  $i$ -ésima tarea y  $\lambda_i$  son los elementos de la matriz  $\Lambda$  para la tarea  $i$ . El índice puede también indicar la prioridad de cada tarea, por lo que la tarea 1 es de mayor nivel de jerarquía que cualquier otra. Resolviendo cada tarea individualmente, es posible combinar las soluciones individuales. Para el caso de 3 tareas, la solución de (7-5) se modifica del siguiente modo:

$$\dot{\mathbf{x}}_d = \dot{\mathbf{x}}_{1d} + (I - J_1 J_1^\dagger) [\dot{\mathbf{x}}_{2d} + (I - J_2 J_2^\dagger) \dot{\mathbf{x}}_{3d}] \quad (7-6)$$

$I$  es la matriz identidad de la dimensión apropiada. En las ecuaciones (7-5) y (7-6), cada sub-tarea es resuelta individualmente como si no tuviese relación con alguna otra. Luego, su contribución a la solución general se agrega. Las velocidades de las tareas de menor nivel son proyectadas en el espacio nulo de la tarea superior inmediata, de esta forma se remueven las componentes que pueden tener conflictos

Para ejemplificar esto, se analiza el caso del control de una formación de 2 vehículos aéreos donde se desea realizar el control del baricentro de dicha formación. Es posible analizar que si ambos vehículos rotan con respecto al baricentro siempre a la misma distancia se cumplirá el objetivo de control, entonces resulta evidente que es posible agregar otra tarea dentro del esquema de control que restrinja la posición de dichos robots. Todas aquellas soluciones que no modifican la posición del baricentro, están en el espacio nulo del Jacobiano asociado a la tarea

Una característica importante del enfoque de control Basado en Espacio Nulo es que siempre se cumple la tarea de mayor prioridad o jerarquía. Las de menor prioridad, se alcanzan en un subespacio donde estas no generan conflicto con aquellas de mayor jerarquía. Esta es una clara ventaja frente a los esquemas competitivos, donde solo se realiza una tarea a la vez, y los enfoques cooperativos,

donde el uso de una combinación lineal de cada una de las salidas de las tareas cuyo resultado no garantiza el cumplimiento por completo de ninguna de las tareas. Cabe notar que, con este enfoque, la tarea de mayor prioridad subsume a las de menor jerarquía. En caso de  $J_1$  sea de rango completo, el espacio nulo será vacío y por lo tanto no será posible cumplir las tareas de menor prioridad.

Otra ventaja de este enfoque con respecto a las técnicas competitivas es su formalidad matemática que permite realizar análisis de estabilidad para demostrar analíticamente el desempeño de la ley de control.