



UNCUYO 80 años
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO
MENDOZA - ARGENTINA

FACULTAD DE INGENIERÍA
“DOCTORADO EN INGENIERÍA”

ESTIMACIÓN DE ESTADOS EN SISTEMAS
ELÉCTRICOS DE POTENCIA

T E S I S

PARA OPTAR EL GRADO DE:
PhD en INGENIERÍA

PRESENTA:
Holger Cevallos Ulloa

TUTOR:
Douglas Plaza G., PhD



UNCUYO 80 años
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

Mendoza, Argentina, Mayo 2022

A mi querida institución, la Escuela Superior Politécnica del Litoral y a mi Facultad de Ingeniería en Electricidad donde he pasado los mayores y mejores años de mi vida y a mi segundo hogar académico la Universidad de Cuyo, les doy las gracias por la formación académica que me han dado. Y desde luego, dedico este logro a mi familia por el apoyo incondicional dado para vencer este reto.

Holger Cevallos Ulloa

Reconocimientos

Agradezco a mi director de tesis PhD Douglas Plaza por haberme motivado a realizar mis estudios doctorales y por haberme guiado en el transitar de este trabajo desde la selección del tema de investigación a desarrollar hasta la culminación del mismo. Su guía y comentarios precisos en el desarrollo del trabajo fueron claves. De manera muy especial le agradezco a Dios por haber puesto en mi camino a las personas precisas y por darme la fuerza de voluntad y las capacidades intelectuales para poder concluir satisfactoriamente este trabajo. La honra y gloria es para nuestro Dios.

Resumen

En este manuscrito se considera la estimación de estados estática en sistemas eléctricos de potencia en los cuales se simula la dinámica del sistema a nivel de las cargas modificando las mismas en incrementos porcentuales del 5 al 30% para luego observar el comportamiento de las técnicas de estimación: Mínimos Cuadrados Ponderados (WLS), el Filtro Extendido de Kalman (EKF) y el Filtro de Partículas (PF) para extraer resultados comparativos de la performance de estas técnicas observando los valores de magnitud de voltajes y ángulos de fase en las barras del sistema. El sistema de potencia sobre los que se harán estos estudios son los sistemas de casos de prueba de la IEEE de 14 y 30 barras. Posteriormente se presenta el Filtro de Partículas (PF) y el Filtro de Ensemble de Kalman (EnKF) para analizar el comportamiento dinámico de las máquinas síncronas, en los cuales se estima el valor de variables de estado como la velocidad angular, la variación transiente de los voltajes de los ejes en cuadratura de las máquinas sincrónicas en un periodo de tiempo de 15 segundos. El sistema de potencia sobre los que se harán este estudio es el sistema de prueba de la IEEE de 14 barras modificado.

Los resultados obtenidos del análisis efectuado en la estimación de estados del sistema casi estático, en el cual, se simula el sistema con una variación porcentual de la carga en determinadas barras, el estimador que presenta una mejor exactitud, pero un mayor tiempo computacional en el desarrollo de la simulación es el filtro de partículas. Los indicadores, definidos y considerados en este análisis, son el índice de error de estimación de la magnitud del voltaje en la barra n ($\varepsilon_v(n)$), el índice de error de estimación del ángulo del voltaje en la barra n ($\varepsilon_\theta(n)$), y la media del error de estimación para cada paso k ($\varepsilon(k)$) y los tiempos de ejecución de los algoritmos.

En la evaluación del rendimiento del EnKF y el PF, en la estimación dinámica de las variables de estados del sistema ante la presencia de una perturbación el PF presenta un mejor rendimiento.

Los resultados obtenidos se pueden explicar en el contexto que el sistema es no lineal y que el filtro de partículas por su naturaleza responde bien frente a la no linealidad del sistema sujeto a ruidos Gaussianos y no Gaussianos. En la estimación dinámica, a pesar de que, el EnKF en su desarrollo también introduce métodos numéricos de Monte Carlo, el PF presenta un mejor desempeño. El indicador utilizado para analizar el rendimiento, en este último caso, es la raíz del error cuadrático medio (RMSE).

Abstract

The static and dynamic state estimation in electric power systems is considered. The system dynamics at the load level are simulated by modifying the loads in percentage increments from 5% to 30%, in order to observe the behavior of the estimation techniques: weighted least squares, the extended Kalman filter, and the particle filter. These techniques are compared by examining the voltage magnitudes and phase angles at the system's buses. Then, the particle filter and the ensemble Kalman filter are presented to analyze the dynamic behavior of synchronous machines.

The results show that, in static estimation, the estimator that exhibits the best accuracy, but the highest computational time is the particle filter. In dynamic estimation in the presence of a disturbance, the particle filter also shows the best performance. The particle filter responds well to the system's nonlinearity under Gaussian and non-Gaussian noise, despite the ensemble filter also incorporating Monte Carlo numerical methods in its development.

Índice general

Índice de figuras	XI
Índice de tablas	XIII
Símbolos y acrónimos	XV
1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	1
1.2. Planteamiento del problema	3
1.3. Justificación	4
1.4. Objetivos	4
1.5. Metodología	5
1.6. Estructura de la tesis	6
1.7. Contribuciones	7
1.8. Trabajos publicados	8
2. Conceptos básicos en la estimación de estados.	9
2.1. Introducción	9
2.2. Mínimos Cuadrados Ponderados - WLS.	9
2.2.1. Función de densidad de probabilidad Gausiana (Normal)	10
2.2.2. La función de probabilidad	10
2.3. Tipos de sistemas	12
2.4. Sistemas determinísticos	12
2.5. Sistemas determinísticos discretos	12
2.5.1. Modelo lineal de espacio-estado	13
2.5.2. Modelo no lineal de espacio de estado	13
2.6. Sistemas estocásticos y estimación de estados	14
2.6.1. Modelo lineal de espacio de estado	15
2.6.2. Modelo de espacio de estado no lineal	15
2.7. Modelos de espacios de estado representados por <i>pdfs</i>	16
2.8. Introducción a técnicas recursivas de estimación Bayesianas	17
2.9. Métodos de Monte Carlo	18

3. Estimación de estados: mínimos cuadrados ponderados y filtros de Kalman	21
3.1. Introducción	21
3.2. Modelo del Sistema basado en las mediciones	22
3.2.1. La función de medición, $h(x_k)$	22
3.2.2. La matriz Jacobiana de las mediciones, H	24
3.3. Mínimos cuadrados ponderados - WLS	25
3.4. El Filtro discreto de Kalman	27
3.4.1. Introducción	27
3.4.2. Estimación recursiva Bayesiana en el desarrollo del Filtro de Kalman	27
3.4.2.1. Paso de predicción	28
3.4.2.2. Paso de análisis	28
3.5. El Filtro Extendido de Kalman	29
3.5.1. Introducción	29
3.5.2. Estimación recursiva Bayesiana en el desarrollo del filtro de Kalman extendido	31
3.5.2.1. Paso de predicción	31
3.5.2.2. Paso de análisis	32
3.6. Filtro de Ensamble de Kalman	34
3.6.1. Introducción	34
3.6.2. Estimación recursiva Bayesiana en el desarrollo del filtro de Kalman de ensamble	34
3.6.2.1. Paso de predicción	35
3.6.2.2. Paso de análisis	36
4. Estimación de estados: filtro de partículas	41
4.1. Introducción	41
4.2. Simulación de Monte Carlo	41
4.3. Muestreo por importancia	42
4.4. Muestreo secuencial por importancia	44
4.5. Degeneración de los pesos de las partículas	46
5. Estimación estática: análisis comparativo del desempeño de los métodos WLS, EKF y PF	49
5.1. Descripción de los estudios de simulación	49
5.1.1. El sistema eléctrico de potencia	49
5.1.2. Evaluación del rendimiento	51
5.1.3. Implementación del Mínimo Cuadrado Ponderado - WLS	52
5.1.4. Implementación del algoritmo del filtro Extendido de Kalman - EKF	52
5.1.5. Implementación del Filtro de Partículas	54
5.2. Análisis de resultados y conclusiones	55

6. Estimación dinámica: filtro de Kalman de ensamble y filtro de partículas en la estimación de estados en sistemas eléctricos de potencia multimáquinas	67
6.1. Introducción	67
6.2. Modelos Dinámicos	69
6.3. Implementación estimadores EnKF y PF	70
6.4. Análisis de resultados y conclusiones	73
7. Conclusiones	89
7.1. Introducción	89
7.2. Rendimiento de los estimadores Mínimos Cuadrados Ponderados, Filtro Extendido de Kalman y el Filtro de Partículas	90
7.3. Filtro de Ensamble de Kalman y Filtro de Partículas en la estimación de estados en sistemas eléctricos de potencia multimáquinas	90
Bibliografía	93

Índice de figuras

1.1. Diagrama del manuscrito	6
2.1. Función de Densidad de Probabilidad Estándar Gausiana (Normal), $\Phi(u)$	11
3.1. Modelo de dos puertos π de líneas de transmisión	23
5.1. Sistema de prueba IEEE 14 barras	50
5.2. Diagrama de flujo del algoritmo usado en la implementación del EKF . .	58
5.3. Diagrama de Flujo del algoritmo usado en la implementación del PF . .	59
5.4. Tiempo de ejecución de los estimadores WLS, EKF, PF	60
5.5. Error de magnitud de voltaje y ángulo en barra (bus). Sistema de prueba ieee 14 barras.	60
5.6. Error de estimación paso (step) k . Sistema de prueba ieee 14 barras. . .	62
5.7. Magnitud de voltaje en barra 9. Sistema de prueba ieee 14 barras. . . .	62
5.8. Ángulo (angle) de fase voltaje barra 9. Sistema de prueba ieee 14 barras.	63
5.9. Error de estimación paso (step) k . Sistema de prueba ieee 30 barras. . .	63
5.10. Magnitud de voltaje en barra 14. Sistema de prueba ieee 30 barras. . . .	63
5.11. Ángulo (angle) de fase voltaje barra 14. Sistema de prueba ieee 30 barras.	63
5.12. Error de magnitud de voltaje y ángulo en barra (bus). Error 5% Potencias y 1% magnitudes de voltaje. Sistema de prueba ieee 14 barras. . . .	64
5.13. Error de magnitud de voltaje y ángulo en barra (bus). Error 5% Potencias y 1% magnitudes de voltaje. Sistema de prueba ieee 30 barras. . . .	64
5.14. Error de estimación paso (step) k . Error 5% Potencias y 1% magnitudes de voltaje. Sistema de prueba ieee 14 barras.	65
5.15. Error de estimación paso (step) k . Error 5% Potencias y 1% magnitudes de voltaje. Sistema de prueba ieee 30 barras.	65
6.1. Conexión de máquina sincrónica usando un transformador ideal para adaptar los niveles de voltaje en un sistema existente.	72
6.2. Sistema de prueba IEEE 14-barras modificado.	72
6.3. Velocidad angular: valores estimados y verdaderos. Filtro de Kalman de ensamble y filtro de partículas. Ruido con distribución normal.	73

ÍNDICE DE FIGURAS

6.4. Ed prima: valores estimados y verdaderos. Filtro de Kalman de ensamble y filtro de partículas. Ruido con distribución normal.	76
6.5. Eq prima: valores estimados y verdaderos. Filtro de Kalman de ensamble y filtro de partículas. Ruido con distribución normal.	77
6.6. Velocidad angular: valores estimados y verdaderos. Filtro de Kalman de ensamble y filtro de partículas. Ruido con distribución bimodal. p=0.95.	77
6.7. Velocidad angular: valores estimados y verdaderos. Filtro de Kalman de ensamble y filtro de partículas. Ruido con distribución bimodal. p=0.90.	78
6.8. Velocidad angular: valores estimados y verdaderos. Filtro de Kalman de ensamble y filtro de partículas. Ruido con distribución bimodal. p=0.85.	78
6.9. Velocidad angular: valores estimados y verdaderos. Filtro de Kalman de ensamble y filtro de partículas. Ruido con distribución bimodal. p=0.75.	79
6.10. Edprima: valores estimados y verdaderos. Filtro de Kalman de ensamble y filtro de partículas. Ruido con distribución bimodal. p=0.95.	79
6.11. Edprima: valores estimados y verdaderos. Filtro de Kalman de ensamble y filtro de partículas. Ruido con distribución bimodal. p=0.90.	80
6.12. Edprima: valores estimados y verdaderos. Filtro de Kalman de ensamble y filtro de partículas. Ruido con distribución bimodal. p=0.85.	80
6.13. Edprima: valores estimados y verdaderos. Filtro de Kalman de ensamble y filtro de partículas. Ruido con distribución bimodal. p=0.75.	81
6.14. Eqprima: valores estimados y verdaderos. Filtro de Kalman de ensamble y filtro de partículas. Ruido con distribución bimodal. p=0.95.	81
6.15. Eqprima: valores estimados y verdaderos. Filtro de Kalman de ensamble y filtro de partículas. Ruido con distribución bimodal. p=0.90.	82
6.16. Eqprima: valores estimados y verdaderos. Filtro de Kalman de ensamble y filtro de partículas. Ruido con distribución bimodal. p=0.85.	82
6.17. Eqprima: valores estimados y verdaderos. Filtro de Kalman de ensamble y filtro de partículas. Ruido con distribución bimodal. p=0.75.	83
6.18. RMSE para la variable de estado ω	85
6.19. RMSE para la variable de estado E_d^i	85
6.20. RMSE para la variable de estado E_q^r	86
6.21. Tiempo de ejecución de los estimadores PF y EnKF	87

Índice de tablas

5.1. Valores de la desviación estándar de las mediciones $\sqrt{R_k}$. [Sharma et al. (46)]	51
5.2. Tiempos de ejecución: WLS, Filtro EKF y Filtro de Partículas (<i>PF</i>). Estimación estática. Ieee 14 barras.	55
5.3. Índices de rendimientos promedios. Ieee 14 barras ($*10^{-3}$).	56
5.4. Índices de rendimientos promedios. Ieee 14 y 30 barras. EKF y PF ($*10^{-3}$).	56
5.5. Error de magnitudes de voltajes y ángulos en barra N . Ieee 14 barras ($*10^{-3}$).	57
5.6. Error de magnitudes de voltajes y ángulos en barra N . Ieee 30 barras ($*10^{-3}$).	61
5.7. Índices de rendimientos promedios. Ieee 14 y 30 barras. WLS, EKF y PF. Error 5% Potencias y 1% magnitudes de voltaje ($*10^{-3}$).	62
5.8. Tiempo de ejecución en segundos: WLS, EKF y PF. Ieee 14 y 30 barras. Error 5% Potencias y 1% magnitudes de voltaje.	62
6.1. Sistema de pruebas IEEE 14-barras modificado. Datos máquinas sincrónicas - 100MVA BASE	74
6.2. Sistema de pruebas IEEE 14-barras modificado. Datos Regulador de Voltaje: IEEE DC1A del estándar IEEE 421.5 (2005)	75
6.3. Sistema de pruebas IEEE 14-barras modificado. Datos Regulador de Velocidad: BPA GG WSCC Type G	76
6.4. RMSE de los resultados de estimación del Filtro de Partículas (<i>PF</i>) y Filtro de Ensamble de Kalman (<i>EnKF</i>). Con ruidos de distribución normal y bimodales con diferentes pesos.	84
6.5. Tiempos de ejecución: del Filtro de Partículas (<i>PF</i>) y Filtro de Ensamble de Kalman (<i>EnKF</i>). Con ruidos de distribución normal y bimodales con diferentes pesos.	86

Índice de algoritmos

1.	Filtro de Bayes	18
2.	Filtro discreto de Kalman	30
3.	Filtro extendido de Kalman	34
4.	Filtro de Ensemble de Kalman	39
5.	Filtro SIS General	45
6.	Filtro SIS Natural	46
7.	Mínimos Cuadrados Ponderados - WLS	53

Símbolos y acrónimos

Símbolos

Símbolo	Descripción
\sim	distribuido de acuerdo a
\simeq	aproximadamente igual
δ	función delta de Dirac
\propto	proporcional a
$\xrightarrow[N \rightarrow \infty]$	convergencia casi segura
$\xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\Rightarrow}$	convergencia en distribución
$E[.]$	valor esperado de un campo randómico
$\overline{E[.]}$	espectativa empírica
$F_{t,t-1}$	lineal/matriz de transición linealizada (Jacobian) en el tiempo $t - 1$ to t
$f_{t,t-1}(x, \dots)$	función no lineal discreta para la propagación de los estados en el tiempo $t - 1$ to t
$h_t(x, \dots)$	función no lineal discreta que mapea los estados a las observaciones en el tiempo t
H_t	lineal/matriz de observación linealizada (Jacobian) que mapea los estados del sistema a las observaciones del sistema en el tiempo t
M^T	matriz transpuesta M
$\mathcal{N}(z : \mu, \Sigma)$	Distribución Gaussiana de campo aleatorio z con parámetros: media μ y matriz de covarianza Σ
N	número de elementos/partículas de ensamble

Símbolo	Descripción
$p(\cdot)$	función de densidad de probabilidad
$p(\cdot \cdot)$	función de densidad de probabilidad condicional
$p_N(\cdot)$	función de densidad de probabilidad empírica
P_t	matriz de covarianza del error del proceso en el tiempo t
P_t^a	matriz de covarianza del error del proceso para el paso de análisis en el tiempo t
P_t^f	matriz de covarianza del error del proceso para el paso de predicción en el tiempo t
P_t^{xy}	covarianza cruzada entre el ensamble de predicción y el ensamble de observación modelado en el tiempo t
P_t^{yy}	covarianza muestral del ensamble de la observación modelada en el tiempo t
\hat{P}_t	covarianza ponderada del error del proceso
$q(\cdot)$	función de densidad de probabilidad de importancia
Q	matriz de covarianza definida positiva del ruido del proceso
R	matriz de covarianza definida positiva del ruido de la observación
u_t	vector de las señales de entrada en el tiempo t
$\mathcal{U}(\cdot)$	distribución uniforme
v_t	vector del ruido de la observación al tiempo t
$var(\cdot)$	varianza de una variable aleatoria
w_t	vector del ruido del modelo al tiempo t
$w_{t,i}$	peso de importancia no normalizado de la partícula i en el tiempo t
$\tilde{w}_{t,i}$	peso de importancia normalizado de la partícula i en el tiempo t
x_t	vector de estado de un sistema estocástico discreto en el tiempo t
x_t^a	vector de estado del paso de análisis al tiempo t
X_t^a	matriz de ensamble en el paso de análisis al tiempo t
$x_{t,i}^a$	elemento i del ensamble del paso de análisis al tiempo t
x_t^f	vector de estado del paso de predicción al tiempo t
X_t^f	matriz de ensamble de predicción en el tiempo t
$x_{t,i}^f$	elemento i del ensamble de predicción en el tiempo t
$x_{t,i}^*$	elemento i del conjunto de partículas obtenidas después del remuestreo al tiempo t
$x_{1:t}$	secuencia del vector de estado en el tiempo 1 hasta el tiempo t
\hat{x}_t	valor medio ponderado del vector de estado
\bar{x}_t	espectativa de x al tiempo t

Símbolo	Descripción
y_t	vector de estado de las observaciones en el paso de tiempo t
$y_{1:t}$	vector de secuencia de observación en el paso de tiempo 1 hasta el paso de tiempo t
Y_t^s	matriz de observaciones surrogadas al paso de tiempo t
$y_{t,i}^s$	elemento i de la matriz de observación surrogada en el paso de tiempo t

Acrónimos

Notación	Descripción
DSE	Estimación Dinámica de Estados
EnKF	Filtro de Kalman de Ensemble
EKF	Filtro de Kalman Extendido
GPS	Posicionamiento Global Satelital
IEEE	Instituto de Ingenieros Eléctricos y Electrónicos
IS	Muestreo de Importancia
KF	Filtro de Kalman
MC	Monte Carlo
MMC	Métodos de Monte Carlo
PMU	Unidad de Medición Fasorial
PST	Toolbox de Sistemas de Potencia (Matlab)
PF	Filtro de Partículas
pdf	Función de densidad de probabilidad
SEP	Sistemas Eléctricos de Potencia
SIS	Muestreo de Importancia Secuencial
SPF	Filtro de Partículas Estándar
SysR	Remuestreo Sistemático
UKF	Filtro de Kalman "Unscented"
WLS	Mínimos Cuadrados Ponderados

Introducción

1.1. Antecedentes

La Estimación de Estado (SE) en sistemas eléctricos de potencia es considerado como el corazón de cualquier centro de control de energía. Es responsable de proveer una completa y confiable base de datos en tiempo real para el análisis, control y funciones de optimización [Monticelli (35)]. Desde que la estimación de estados en sistemas eléctricos de potencia fue introducida por F. C. Schweppe et. al en 1969-1970 [Schweppe and Wildes (44)], [Schweppe and Rom (43)], [Schweppe (42)], esta área ha permanecido extremadamente activa y en permanente desarrollo. Actualmente, la estimación de estado juega un rol importante en los manejos modernos de los sistemas de energía (EMS) proveyendo otras funciones tales como el monitoreo de la seguridad, flujo óptimo de potencia, análisis de seguridad, estudios de flujo de energía en línea, control supervisor, control automático de voltaje y control de despacho de carga. La estimación de estados de las redes en los SEP es importante para obtener la mejor estimación del estado actual del sistema dado y evaluar su comportamiento estático y dinámico, estimar parámetros eléctricos de la red en los puntos en los cuales no es posible medirlos, y la necesidad de aplicar éstas técnicas en el análisis de la calidad de energía debido a las significativas pérdidas que se producen debido a la presencia de armónicos, variaciones de frecuencia, transientes, caídas de voltaje, pérdidas de sincronismo ante eventuales fallos que se pueden presentar en el sistema. Se plantea la necesidad de estudiar profundamente las metodologías usadas para la estimación de estados y realizar estudios comparativos de su performance para determinar el rendimiento de estas metodologías.

La estimación de estado es una técnica que se realiza mediante el procesamiento y la interpretación de las mediciones de los equipos y dispositivos que se encuentran supervisando los estados del sistema. En los SEP se destacan la estimación de estados tanto estática como dinámica [Abur and Expósito (2)], [Valverde and Terzija (54)], [Netto et al. (36)], [Zhang et al. (58)], [Xu and Abur (56)]. Entre los trabajos desarrollados en esta línea de investigación consta una formulación de estimación de estados lineal para sistemas de distribución trifásicos balanceados y se han incluido casos de sistemas

desbalanceados y de sistemas monofásicos. El estimador sigue una formulación variable compleja e incorpora medidas de fasores sincronizados en la estimación de estado [Liu (32)]. También se han implementado diferentes recursos matemáticos en la metodología de la estimación de estados, así, en [Therrien et al. (52)], se realiza la estimación de estados en redes de distribución eléctrica basado en la formulación modificada de análisis nodal aumentado, en este estudio se realiza una consideración especial en la estimación de las posiciones de las tomas (taps) de los transformadores y reguladores. Se han realizado además la estimación de estado dinámica con fasores de medidas sincronizados en sistemas de potencia, en el cual se evalúa el verdadero estado del sistema realizando mediciones con unidades de medidas fasoriales sincronizadas (PMU) y con predicciones de las mismas [Aminifar et al. (4)].

Se introdujo el filtro de Kalman en el desarrollo de las estimaciones de estado en los sistemas de potencia, por ejemplo la estimación de estado estática de sistemas eléctricos de potencia, [Blood et al. (6)], este estudio presenta un trabajo preliminar sobre el uso del filtro de Kalman de tiempo discreto en el que se incorpora datos históricos en el estimador de estado; esta técnica se la demuestra usando la solución de un ejemplo simplificado de un flujo de potencia real. El filtro extendido de Kalman (EKF) [Simon (48)], aplicado en sistemas no lineales, su exactitud depende de la linealización, una aproximación de la función no lineal. El filtro de Kalman “unscented” (UKF) para la estimación dinámica de los sistemas de potencia, fue presentado por G. Valverde V. Terzija [Valverde and Terzija (54)], el cual está basado en la aplicación de una transformación natural (UT) combinada con la teoría del filtro de Kalman. La metodología del UKF se presenta y su validez se demuestra mediante la prueba en tres diferentes sistemas de potencia en condiciones de redes y medidas de variables eléctricas típicas. Se compara, además, su rendimiento con el filtro extendido de Kalman.

El filtro de Kalman de ensamble (EnKF) fue introducido por G. Evensen [Evensen (20)] es un filtro recursivo disponible para resolver problemas con no linealidades y gran número de variables como en los modelos geofísicos.

El filtro de Partículas (PF) fue introducido en el año 1993 [Gustafsson (25)] para resolver problemas de filtrado bayesiano no lineales como una aproximación numérica. El filtro de partículas para la estimación de estados es presentado como una alternativa a otros esquemas basados principalmente en los filtros de Kalman. El filtro de Partículas puede ser usado en la estimación de sistemas dinámicos no lineales con ruidos Gaussianos y no Gaussianos y tiene una considerable exactitud [Emami et al. (19)].

En [Sarfi et al. (40)] trata la comparación del rendimiento entre los estimadores UKF y EnKF usando una estimación de estado dinámica descentralizada propuesta sobre un sistema de prueba WSCC de 9 barras en un simulador digital de tiempo real. Para considerar la corrupción de los datos usa una distribución bimodal conteniendo dos distribuciones normales con diferentes pesos y varianzas añadidas a las mediciones. La performance de ambos UKF y EnKF son comparadas usando el error cuadrático medio como índice numérico de comparación.

Es de mencionar que, en la revisión del estado del arte para este trabajo, no se ha encontrado al momento un estudio comparativo entre el PF y el EnKF relativo a su

sensibilidad ante la presencia de ruidos de naturaleza no Gaussiana considerando que el EnKF y el PF tienen similitudes en su desarrollo. Una partícula del PF es similar a un elemento del conjunto (ensamble) en el EnKF, además el EnKF es la implementación del método de Monte Carlo en el filtro de Kalman. Es importante realizar un estudio al respecto para dilucidar este particular.

La mayoría de los sistemas de monitoreo están basados en una modelación estática de los sistemas de potencia, sin embargo, por la naturaleza de la variabilidad de las cargas conectadas a los sistemas de potencia y últimamente los recursos de energía distribuida incorporados a los sistemas originan una variación aleatoria tanto a la demanda como la generación, por lo que los sistemas de potencia no operan de manera estática sino más bien aleatoriamente [Zhao et al. (61)]. La estimación de estados estática (SSE) no captura el comportamiento dinámico del sistema, mientras que en contraste la estimación de estados dinámica (DSE) sí lo hace, tanto en el control como en la seguridad y protección de los sistemas de potencia [Meliopoulos et al. (34)], [Cui et al. (13)]. La DSE permite analizar la dinámica oscilatoria del control no lineal de los sistemas de potencia como en [Singh and Pal (49)], [Singh and Pal (50)].

En el presente trabajo las técnicas de estimación usadas aplican la teoría de estimación Bayesiana tomando en cuenta que se tiene la ventaja que si hay una mejor exactitud en información anterior del parámetro estimado la estimación del estado será más precisa. La estimación Bayesiana juega un papel muy importante en la estimación de estados en los sistemas eléctricos de potencia [Song et al. (51)].

1.2. Planteamiento del problema

Hay al menos tres aspectos importantes a considerar en el desarrollo de los sistemas eléctricos de potencia, que constituyen por sí mismo problemas a investigar.

En primer lugar, el desarrollo de tecnologías de medición avanzadas de los parámetros de las redes eléctricas demanda un reto a la comunicación y la infraestructura de procesamiento de datos de la red.

En segundo lugar, las regulaciones y la competencia de precios de mercado pueden exigir a las empresas de servicios públicos compartir más información y monitorear la red en grandes áreas geográficas. Esto requiere un mayor desarrollo de control distribuido, y por lo tanto, un sistema eléctrico distribuido para facilitar seguimiento coordinado de toda la interconexión.

Por último, para facilitar las funciones de la red, como la demanda de respuesta y el flujo de energía en ambos sentidos, la administración de los centros de control de los sistemas eléctricos de potencia requieren información actualizada de las respuestas estáticas y dinámicas de los sistemas eléctricos, así como conocer el estado de la red en tiempo real, poder modelar la red y administrarla de la mejor manera ante las contingencias que se pudieran presentar y que originen riesgos de pérdidas de sincronismos, cambios en la topología de la red y variaciones en los flujos de potencias hacia los centros de cargas, lo cual, constituye un verdadero problema. Esto exige una estimación

de estados con requisitos más estrictos sobre los algoritmos de control en los sistemas de transmisión y distribución. Con el paso del tiempo los sistemas de transmisión se convierten en sistemas que requieren técnicas de control más avanzadas, por lo que se necesitará más desarrollo en la aplicación de algoritmos y metodologías en la estimación de estados que se acojan sustancialmente al aumento del número de mediciones en tiempo real y que presenten una mayor exactitud en los procesos de estimación de estados estática y dinámica de los sistemas de potencia para poder administrar de la mejor manera el sistema.

1.3. Justificación

Aunque la estimación de estados a nivel de transmisión en las redes eléctricas de potencia tiene una larga historia, se requiere una mayor investigación y desarrollo de esquemas innovadores de estimación de estados debido a la necesidad de satisfacer los retos y requerimientos que presentan las redes eléctricas de potencia actuales. La información que necesitan los centros de administración de los sistemas de potencia requieren cada vez una mayor precisión y que sobre todo puedan captar la dinámica del sistema, tanto como resultados de la variación de la carga en determinadas barras de la red en pasos determinados, así como del comportamiento dinámico del sistema eléctrico en presencia de fallas que pueden hacer perder el sincronismo del sistema, lo que podría producir apagones parciales o totales de acuerdo a la gravedad de las contingencias que se puedan presentar o en su defecto pérdidas de alimentadores y fluctuaciones oscilatorias de voltaje.

Mediante un estudio de estimación de estados en estos escenarios se puede prever el comportamiento de la red para una buena administración del sistema eléctrico. Además, tomar medidas preventivas tendientes a realizar un apropiado diseño o auditoria del sistema eléctrico de potencia. El presente trabajo contribuye en este campo:

- Realizando estudios comparativos de la performance de algunas técnicas de estimación de estados estática en sistemas eléctricos de potencia como la de los Mínimos Cuadrados Ponderados, el Filtro Extendido de Kalman y el Filtro de Partículas .
- Realizando estudios comparativos de la performance de las técnicas de estimación de estados dinámica en sistemas eléctricos de potencia. Las técnicas de estimación a considerar son el EnKF y el PF.

1.4. Objetivos

El trabajo presentado se concentra en los dos siguientes objetivos.

1. Realizar la estimación de estados estática de un sistema de potencia de 14 y 30 barras, con la finalidad de hacer un estudio comparativo del funcionamiento de los estimadores WLS, EKF y PF en relación a su rendimiento.
2. Realizar la estimación de estados dinámica en un sistema de prueba modificado de la IEEE de 14 barras durante el período transitorio posterior a un disturbio presentado en la red y realizar un estudio comparativo de los estimadores PF y EnKF en relación a su rendimiento, principalmente en lo relacionado a su sensibilidad en la respuesta de los estimadores ante la contaminación con ruidos con distribución Gaussiana y no Gaussiana.
3. Presentar los resultados obtenidos y las conclusiones respectivas.

1.5. Metodología

Para obtener los objetivos propuestos se plantea la siguiente metodología.

1. Se presenta el marco teórico de cada una de las técnicas propuestas para realizar este trabajo: WLS, EKF, EnKF y el PF. Se presenta el algoritmo de cada uno de estas técnicas a aplicar en la estimación dinámica de estados del sistema de potencia.
2. Se realiza la estimación de estados estática del sistema eléctrico de potencia, la implementación se llevará a cabo en los sistemas eléctricos de potencia de la IEEE de 14 barras y 30 barras, usando los estimadores WLS, EKF y PF. Luego, se procederá a realizar el análisis comparativo de sus rendimientos, considerando para el efecto la exactitud y el costo computacional.
3. Se realiza la estimación de estados dinámica en un sistema de prueba de la IEEE de 14 barras modificado, usando los estimadores PF y EnKF. Finalmente, se procederá a realizar el análisis comparativo de sus rendimientos, considerando para el efecto la exactitud y el costo computacional de cada uno de los estimadores. Se consideran dos escenarios: aplicación de ruidos con distribución normal y aplicación de ruido no Gaussianos. En este último se aplicará pesos a la distribución no Gaussiana y se valorará el rendimiento de los estimadores para cada uno de los pesos considerados.
4. Se usa el software Matlab para la implementación de la simulación de cada uno de los casos propuestos.
5. Se presentan los resultados obtenidos, análisis y conclusiones respectivas.

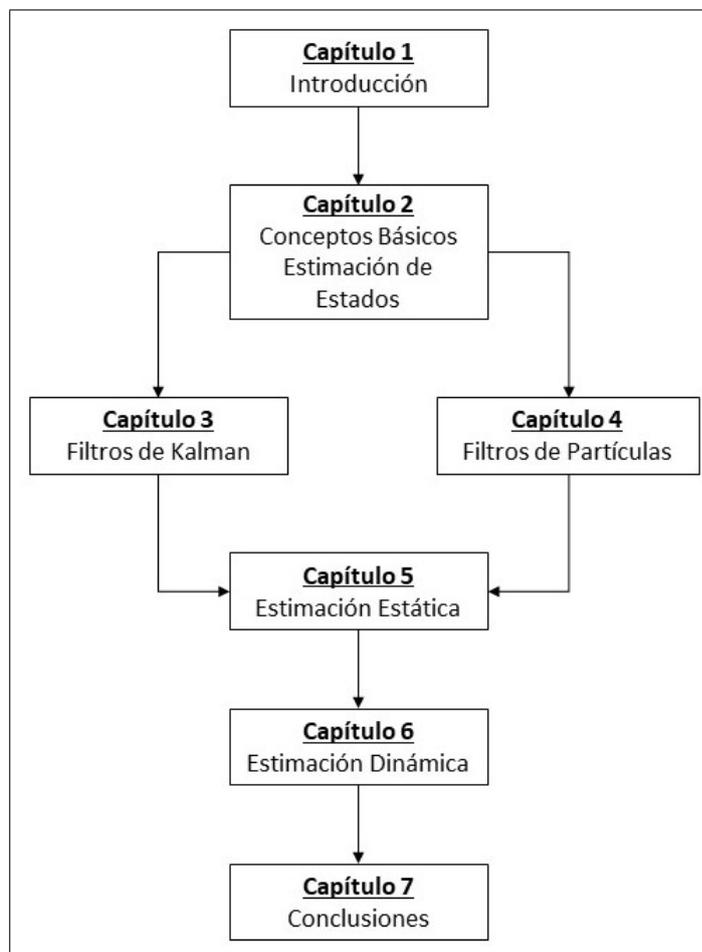


Figura 1.1: Diagrama del manuscrito

1.6. Estructura de la tesis

Este trabajo está dividido en siete capítulos según se muestra en la vista general de este manuscrito que consta en la figura 1.1. Una descripción general de cada capítulo se muestra a continuación.

Capítulo 2: Conceptos básicos en la estimación de estados El objetivo de este capítulo es introducir algunos conceptos fundamentales, con una breve descripción, de la teoría usada para la estimación de estados de sistemas de diferente naturaleza. Describe los sistemas determinísticos y estocásticos, la representación de estos sistemas y también el marco general para la derivación de los métodos de investigación a desarrollar en este trabajo. El marco a utilizar es la aproximación recursiva Bayesiana.

Capítulo 3: Mínimos Cuadrados Ponderados y el Filtro de Kalman En este capítulo se presenta el sustento teórico en la estimación de estados en los sistemas eléctricos de potencia usando el método de los Mínimos Cuadrados Ponderados, WLS por sus iniciales en inglés. Además se presenta el Filtro de Kalman, en el cual su desarrollo teórico se basa en la perspectiva de la estimación recursiva bayesiana. Se lo usa para la estimación de estados de sistemas lineales. En este capítulo, también se describe el desarrollo teórico básico de algunas variantes del filtro de Kalman para la estimación de estados de sistemas no lineales como el Filtro de Kalman Extendido y el Filtro de Ensemble de Kalman, EKF y EnKF respectivamente por sus iniciales en inglés.

Capítulo 4: El filtro de Partículas El capítulo 4 cubre la teoría relativa al Filtro de Partículas. Su desarrollo teórico está basado en la estimación recursiva Bayesiana, por lo que, el entendimiento de las técnicas recursivas Bayesianas es útil para este propósito.

Capítulo 5: Estimación Estática En este capítulo se presenta la estimación estática de las variables de estado de un sistema eléctrico de potencia, para lo cual se utilizará un sistema de potencia de 14 barras de la IEEE. Las variables de estado a considerar son la magnitud y el ángulo de fase de los voltajes de las barras del sistema. Para la simulación del sistema se considera la variación en pasos de las cargas aplicadas en diferentes barras del sistema eléctrico de potencia. Para la simulación se usa Matlab. Se realiza una comparación del rendimiento de las técnicas de estimación WLS, EKF y PF.

Capítulo 6: Estimación Dinámica El capítulo 6 muestra la estimación dinámica de las variables de estado de las máquinas sincrónicas de un sistema eléctrico de potencia de 14 barras de la IEEE modificado. Para la simulación del sistema se considera la respuesta transiente del sistema ante la presencia de una contingencia en alguna de las barras del sistema. Se usa Matlab y la versión 3.0 de Power Systems Toolbox. Se analiza el comportamiento de los filtros EnKF y PF.

Capítulo 7: Conclusiones En este capítulo, se presentan las conclusiones principales relacionadas a este manuscrito que tiene que ver con la estimación estática y dinámica de estados de sistemas de potencia. Además, se menciona algunas perspectivas futuras de investigación.

1.7. Contribuciones

Las principales contribuciones de este trabajo son listadas a continuación.

1. Introducir al lector en la estimación Bayesiana recursiva (RBE) la cual provee un marco probabilístico que resuelve el problema de la inferencia del estado en términos de funciones de densidad de probabilidad (pdf) condicionales.

2. Presentar de manera resumida y concisa la metodología usada en el desarrollo de la estimación de estados utilizando las técnicas de los Mínimos Cuadrados Ponderados, el Filtro Extendido de Kalman y el Filtro de partículas.
3. Aportar un estudio adicional que muestre comparativamente el rendimiento de estos filtros en la estimación de estados de sistemas de potencia casi estáticos.
4. Este trabajo aporta al conocimiento los resultados de un estudio comparativo del EnKF con el PF a fin de mostrar el rendimiento de cada uno de ellos, tomando en consideración sus respuestas ante la contaminación del sistema con ruidos de naturaleza Gaussiana y no Gaussiana. Permitirá determinar la sensibilidad de los estimadores PF y EnKF, que tienen una similitud operativa frente a la aplicación de estos tipos de ruidos. Se aplica este estudio comparativo de los estimadores indicados en la estimación de estado dinámica de un sistema eléctrico de potencia, en particular sobre el sistema de prueba de la IEEE de 14 barras modificado.

1.8. Trabajos publicados

El presente trabajo está basado principalmente en las siguientes publicaciones.

- Cevallos H., Intriago G., y Plaza D. Performance of the estimators weighted least square, extended Kalman filter, and the particle filter in the dynamic estimation of state variables of electrical power systems. IEEE ICA-ACCA 2018 - IEEE International Conference on Automation/23rd Congress of the Chilean Association of Automatic Control: Towards an Industry 4.0 - Proceedings. 2019. SCOPUS.
- Intriago, G., Cevallos, H., y Plaza, D. The sequential importance sampling particle filter with a systematic resampling in the state estimation of power systems. IEEE ICA-ACCA 2018 - IEEE International Conference on Automation/23rd Congress of the Chilean Association of Automatic Control: Towards an Industry 4.0 - Proceedings. 2019. SCOPUS.
- Cevallos, H., Intriago, G., y Plaza, D. The Extended Kalman Filter and the Particle Filter in the Dynamic State Estimation of Electrical Power Systems. 2018 IEEE 3rd Ecuador Technical Chapters Meeting, ETCM 2018. SCOPUS.
- Cevallos, H., Intriago, G., y Plaza, D. The extended Kalman filter in the dynamic state estimation of electrical power systems. Enfoque UTE, V.9-N.4, Dec.2018, pp. 120 - 130 <http://ingenieria.ute.edu.ec/enfoqueute/> e-ISSN: 1390-6542 / p-ISSN: 1390-9363.
- Cevallos, H., Intriago, G., y Plaza, D. Ensemble Kalman Filter and Particle Filter-based State Estimation on Electrical Power System. 10th International Conference on Mathematical Modeling in Physical Sciences - septiembre 6-9, 2021, virtual, on line Conference. University of Peloponnese, Greece.

Conceptos básicos en la estimación de estados.

2.1. Introducción

A continuación, se describen las técnicas de aproximación utilizadas en la estimación de estados de los sistemas eléctricos de potencia en el presente trabajo. Se empezará con la aproximación de Mínimos Cuadrados Ponderados WLS. Además, conceptos fundamentales de la teoría de sistemas con énfasis en la representación de espacio-estados de los sistemas. Adicionalmente una introducción a las técnicas recursivas Bayesianas usadas en el desarrollo del filtro de Kalman (KF), filtro de Kalman extendido (EKF), el filtro de ensamble de Kalman (EnKF) y el filtro de Partículas. El objetivo de la estimación de estados es determinar el estado más probable de las variables del sistema, basado en las variables medidas.

2.2. Mínimos Cuadrados Ponderados - WLS.

Se asume que los errores de la medición tienen una distribución de probabilidad con parámetros desconocidos. Los errores de la medición se asumen que tienen una distribución Gausiana (normal) y los parámetros para esa distribución son su media, μ y su varianza, σ^2 . Es conveniente revisar la *función de densidad de probabilidad (p.d.f.)* y su correspondiente *función de distribución* de probabilidad (*d.f.*) antes de describir el método.

2.2.1. Función de densidad de probabilidad Gaussiana (Normal)

La función de densidad de probabilidad Normal para una variable aleatoria z está definida como:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left\{\frac{z-\mu}{\sigma}\right\}^2} \quad (2.1)$$

donde z : variable aleatoria
 μ : valor medio o esperado de $z = E(z)$
 σ : desviación estándar de z

La función $f(z)$ cambiará su forma dependiendo de los parámetros μ y σ . Sin embargo, su forma puede ser estandarizada usando el siguiente cambio de variables.

$$u = \frac{z - \mu}{\sigma}$$

de donde:

$$E(u) = \frac{1}{\sigma}(E(z) - \mu) = 0$$
$$Var(u) = \frac{1}{\sigma^2}Var(z - \mu) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1.0$$

Obtenemos la función de densidad estándar Normal (Gausiana), como se muestra en la figura 2.1:

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \quad (2.2)$$

2.2.2. La función de probabilidad

El objetivo de la estimación de estados, en este contexto probabilístico, es determinar el estado más probable del sistema basado en las cantidades que son medidas. Una forma de lograrlo es por la máxima estimación de probabilidad, un método ampliamente usado en las estadísticas. Se asume que los errores de la medición tienen una probabilidad de distribución Gaussiana (Normal). Los parámetros para tal distribución son su valor medio, μ y su varianza, σ^2 .

Si m representa el número de mediciones independientes de una variable, teniendo cada una la misma función de densidad de probabilidad *pdf* Gaussiana. La *pdf* conjunta puede ser expresada como el producto de las *pdf* individuales asumiendo que cada medición es independiente del resto de mediciones:

$$f_m(z) = f(z_1)f(z_2)\dots f(z_m) \quad (2.3)$$

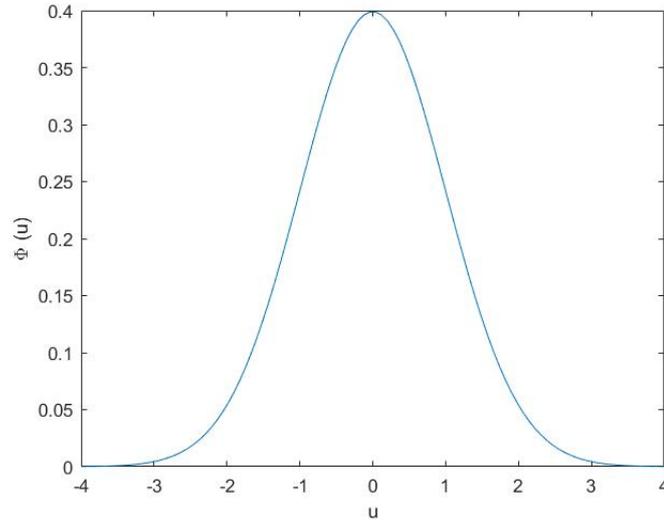


Figura 2.1: Función de Densidad de Probabilidad Estándar Gaussiana (Normal), $\Phi(u)$

donde, z_i : *iésima medición* y $z^T: [z_1, z_2, \dots, z_m]$

La función $f_m(z)$ es denominada la función de probabilidad para z . Básicamente es una medida de la probabilidad de observar un conjunto particular de mediciones en el vector z .

La máxima probabilidad de la estimación se la encuentra resolviendo:

Maximizando:

$$\log f_m(z) \quad (2.4)$$

o Minimizando

$$\sum_{i=1}^m \left(\frac{z_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2 \quad (2.5)$$

El problema de minimización de la ecuación 2.5 es equivalente a minimizar la suma de los cuadrados de los residuos ponderados de las variables de estado x , donde μ_i puede ser expresado como $h_i(x)$ una función no lineal que relaciona el vector de estado x con la *iésima* medición.

$$\sum_{i=1}^m W_{ii} r_i^2$$

sujetos a:

$$r_i = z_i - \mu_i$$

$$z_i = h(x) + r_i$$

$$i = 1, \dots, m$$

$$W_{ii} = \sigma_i^{-2}$$

2.3. Tipos de sistemas

A continuación, se revisa aspectos fundamentales de la teoría de sistemas. Específicamente se hace una breve descripción de los sistemas determinísticos y estocásticos con énfasis en la representación de variables de estados de los sistemas. Además los mecanismos para desarrollar métodos recursivos para la estimación de estados basados en el teorema de Bayes denominados Estimación Recursiva Bayesiana.

2.4. Sistemas determinísticos

Un sistema básicamente estudia la transformación de las señales de entrada en señales de salida. Existen diferentes aproximaciones en la representación de sistemas. Uno de estas aproximaciones es el modelo matemático. En la derivación del modelo matemático se pueden observar dos metodologías que pueden ser aplicadas individualmente o combinadas en el estudio del sistema. El modelo puede ser obtenido por medio del análisis teórico del sistema o una segunda aproximación es la derivación del modelo matemático por medio del análisis experimental. En este caso, los parámetros de los modelos son estimados analizando el comportamiento del sistema bajo condiciones específicas cuando la estructura del modelo es conocida, esto es denominado método de identificación paramétrica. Cuando la estructura del modelo es desconocida se usan métodos de identificación no paramétricos. Los sistemas modelados de acuerdo a modelos obtenidos usando un análisis teórico o por medio del análisis experimental se denominan sistemas determinísticos en los cuales el azar no está involucrado en el desarrollo de los futuros estados del sistema. Un modelo determinístico producirá siempre la misma salida a partir de las mismas condiciones iniciales del sistema.

2.5. Sistemas determinísticos discretos

Un modelo es esencialmente un conjunto de ecuaciones diferenciales de diferente orden, que describen la relación entre la señal de entrada \mathbf{u} (dimensión m_u) y la señal de salida \mathbf{y} (dimensión m_y). Las ecuaciones diferenciales de orden m_x pueden ser transformadas a un sistema de m_x ecuaciones diferenciales de primer orden. Esta representación es conocida como representación de espacios-estado del sistema. En general los modelos de espacio-estado son clasificados en modelos continuos en el tiempo y modelos discretos en el tiempo. Para su implementación en computadores los modelos

de tiempo continuo son transformados en modelos de tiempo discreto y el sistema es determinístico discreto. En este trabajo se usan modelos de tiempo discreto dada la naturaleza de las mediciones que se las puede considerar discretas.

2.5.1. Modelo lineal de espacio-estado

La representación de espacio estado para un sistema discreto lineal variante en el tiempo es el siguiente:

$$x_t = F_{t,t-1}x_{t-1} + B_{t-1}u_{t-1} \quad (2.6)$$

$$y_t = H_t x_t \quad (2.7)$$

La ecuación 2.6 es un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden referida como el modelo del proceso con x_t el vector de estado de dimensión m_x . El espacio de estado del sistema está dado por el dominio del vector de estado de dimensión m_x . $F_{t,t-1}$ es la matriz de transición lineal de dimensión $(m_x \times m_x)$ que mapea el vector de estado desde el paso de tiempo discreto $(t - 1)$ a t . B_{t-1} es una matriz de dimensión $(m_x \times m_u)$. La relación de la variable de espacio de estado al espacio de observación está relacionada según 2.7 con la matriz de observación $(m_y \times m_x)$ H_t .

2.5.2. Modelo no lineal de espacio de estado

La representación de espacio de estado de un sistema no lineal está dada por las siguientes ecuaciones:

$$x_t = f_{t,t-1}(x_{t-1}, u_{t-1}) \quad (2.8)$$

$$y_t = h_t x_t \quad (2.9)$$

con $f_{t,t-1}()$ la función no lineal que relaciona la propagación del estado a través del tiempo y $h_t()$ la función de observación no lineal. Los modelos no lineales son linealizados para la aplicación de la teoría del control lineal en las metodologías de estimación. La linealización se la realiza usando la expansión de las series de Taylor alrededor de una trayectoria nominal del estado, esto es $x_t = x_t^*$ y $u_t = u_t^*$. La expresión para el sistema linealizado es:

$$x_t - x_t^* = F_{t,t-1}[x_{t-1} - x_{t-1}^*] + B_{t-1}[u_{t-1} - u_{t-1}^*] \quad (2.10)$$

$$y_t - y_t^* = H_t[x_t - x_t^*] \quad (2.11)$$

donde $F_{t,t-1}$ y B_{t-1} son las derivadas de $f_{t,t-1}$ con respecto a x y u evaluados con respecto a x_t^* y u_t^* respectivamente. H_t es la derivada de h_t con respecto a x y evaluada en x_t^* . A continuación, se presentan las matrices Jacobianas.

$$F_{t,t-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{m_x}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{m_x}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_{m_x}}{\partial x_{m_x}} \end{bmatrix} |(x_t^*, u_t^*) \quad (2.12)$$

$$B_t = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_{m_x}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{m_x}}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_{m_x}}{\partial u_{m_y}} \end{bmatrix} |(x_t^*, u_t^*) \quad (2.13)$$

$$H_t = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_{m_x}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_{m_y}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_{m_y}}{\partial x_{m_x}} \end{bmatrix} |(x_t^*) \quad (2.14)$$

Es importante mencionar que en las ecuaciones 2.10 y 2.11 se ha considerado solo la derivada de primer orden de la serie de Taylor. Para aproximación más precisa de funciones altamente no lineales la derivada de segundo orden (matriz Hessiana) en la serie de Taylor debe considerarse. Sin embargo, el cálculo computacional de la matriz Hessiana es impráctica debido al alto costo computacional.

2.6. Sistemas estocásticos y estimación de estados

Los términos sistemas estocásticos y estimación de estados están mutuamente relacionados. Basados en la teoría que la mayoría de los sistemas tienen cierta naturaleza aleatoria, la teoría de procesos aleatorios se usa como un complemento para los sistemas determinísticos a fin de describir propiamente las incertidumbres encontradas en los sistemas reales. La representación de un sistema físico por medio de un modelo estocástico incluye las mediciones sobre el sistema real, los efectos de las incertidumbres sobre las observaciones o salidas del proceso y la dinámica del sistema. Los sistemas en los cuales se van a realizar inferencias estocásticas en sus variables de estado, sus procesos deben satisfacer las propiedades de Markov. Un proceso satisface las propiedades de Markov cuando es posible realizar predicciones futuras en el sistema basadas solamente en el estado presente.

El modelamiento de espacio de estados para sistemas discretos estocásticos es realizado a través de ecuaciones en diferencia de naturaleza estocástica. Estas ecuaciones son

ampliamente usadas en estudios de procesos Gaussianos, en los cuales la incertidumbre del sistema dinámico es caracterizada por parámetros estadísticos tales como la media, correlación y covarianza. Esto permite una representación finita del problema, lo cual es importante en la derivación analítica óptima de la solución del problema de estimación de estados. De forma general, el modelo de espacio de estado para la representación de todo proceso no Gaussiano es a través de las funciones de densidad de probabilidad condicional. Las funciones de densidad de probabilidad tienen que ser aproximadas para obtener una solución aproximada al problema de estimación.

2.6.1. Modelo lineal de espacio de estado

Un sistema lineal discreto en el tiempo está representado por la ecuación estocástica en diferencia que se presenta a continuación:

$$x_t = F_{t,t-1}x_{t-1} + B_{t-1}u_{t-1} + G_{t-1}w_{t-1} \quad (2.15)$$

$$y_t = H_t x_t + v_t \quad (2.16)$$

con w_t el ruido de proceso y G_t una matriz de dimensión ($m_x \times m_x$) que relaciona el ruido del proceso al estado, además v_t el ruido de la observación. Si los ruidos son removidos las ecuaciones en diferencia estocásticas se convierten en ecuaciones en diferencia. Para un sistema lineal determinístico, la solución de las ecuaciones en diferencia viene a ser x_t . De otro lado, para un sistema lineal estocástico, la función de densidad de probabilidad de x_t da una completa descripción del estado. Un proceso es referido como Gaussiano o Normal cuando la función de distribución de probabilidad (*pdf*) de la variable de estado aleatoria corresponde a la distribución Gaussiana. Los procesos Gaussianos tienen propiedades útiles: cualquier transformación lineal de procesos Gaussianos conjuntos es otro proceso Gaussiano, y la característica más importante en el desarrollo del filtro de Kalman es que todos los estadísticos de un proceso Gaussiano están completamente determinados por sus estadísticos de primer y segundo orden. Estos *dos* momentos pueden ser obtenidos directamente de la ecuación 2.15 con ruido blanco Gaussiano con una media cero para w_t , esto es $E[w_t] = 0$ y $E[w_t w_t^T] = Q_t$. Estos *dos* momentos son presentados como sigue:

$$\hat{x}_t = F_{t,t-1}\hat{x}_{t-1} + B_{t-1}u_{t-1} \quad (2.17)$$

$$P_t = F_{t,t-1}P_{t-1}F_{t,t-1}^T + G_{t-1}Q_{t-1}G_{t-1}^T \quad (2.18)$$

con \hat{x}_t el valor estimado de x_t y P_t es la matriz covarianza que es un indicador de la incertidumbre de x_t .

2.6.2. Modelo de espacio de estado no lineal

Un sistema lineal estocástico discreto, se representa por:

$$x_t = f_{t,t-1}(x_{t-1}, u_{t-1}, w_{t-1}) \quad (2.19)$$

$$y_t = h_t(x_t, v_t) \quad (2.20)$$

2. CONCEPTOS BÁSICOS EN LA ESTIMACIÓN DE ESTADOS.

Esta representación es una representación funcional ya que $f(\cdot)$ y $h(\cdot)$ son funciones matemáticas. Considerando el ruido de proceso w_t y el ruido de las observaciones v_t , las ecuaciones 2.19 y 2.20 se convierten en:

$$x_t = f_{t,t-1}(x_{t-1}, u_{t-1}, G_{t-1}w_{t-1}) \quad (2.21)$$

$$y_t = h_t(x_t) + v_t \quad (2.22)$$

Para procesos no lineales las funciones de densidad de probabilidades (*pdfs*) no son suficientemente caracterizados por los momentos de primer y segundo orden de las *pdf* como ocurre en el caso de los procesos Gaussianos. Sin embargo, estos 2 primeros momentos dan información valiosa de la trayectoria media y la incertidumbre para el caso de sistemas linealizados.

2.7. Modelos de espacios de estado representados por *pdfs*

En la representación del modelo de espacio de estado por medio de *pdfs* se considera la evolución del estado en el tiempo como un proceso estocástico. La dinámica del modelo es modelada de acuerdo a los procesos de Markov, el cual es un proceso estocástico tal que, dado el estado presente del proceso, su futura evolución es independiente de su pasado. Basado en esta propiedad de Markov, la evolución del estado puede ser representada como sigue:

$$x_{t+1}|x_t \sim p(x_{t+1}|x_t, u_t) \quad (2.23)$$

donde el símbolo \sim significa "distribuido de acuerdo a", $p(x_{t+1}|x_t, u_t)$ es la probabilidad condicional de moverse de x_t a x_{t+1} . Esta distribución es referida como la función de densidad de probabilidad *pdf* de transición. u_t corresponde a las entradas o señales de forzado o control. En el marco probabilístico u_t es considerado un proceso aleatorio. En términos de probabilidad, el proceso de observación está dado por:

$$y_t|x_t \sim p(y_t|x_t) \quad (2.24)$$

donde $p(y_t|x_t)$ es la *pdf* condicional de obtener una cierta medición y_t dado un estado específico x_t . Esta distribución es conocida como la función de distribución de probabilidad *pdf* de la observación.

Adicionalmente a las *pdfs* de la transición de estado y de la observación, una tercera *pdf* debe de considerarse y corresponde a la distribución inicial del estado ($x_0 \sim p(x_0)$).

Las ecuaciones 2.23 y 2.24 representan al sistema no lineal en el cual los parámetros θ del modelo son específicamente conocidos.

2.8. Introducción a técnicas recursivas de estimación Bayesianas

La Estimación Recursiva Bayesianas (RBE) por sus siglas en inglés provee un marco probabilístico el cual recursivamente resuelve el problema de inferencia del estado en términos de la función de densidad de probabilidad condicional. La inferencia de estado conocida como estimación de estado es la estimación del valor del estado actual o la secuencia de valores hasta el tiempo presente.

En el contexto de la RBE, la inferencia sobre $x_{1:t}$ dado $y_{1:t}$ se basa en la *pdf* condicional posterior:

$$p(x_{1:t}|y_{1:t}) = \frac{p(y_{1:t}|x_{1:t})p(x_{1:t})}{p(y_{1:t})} \quad (2.25)$$

donde

$$p(y_{1:t}) = \int p(y_{1:t}|x_{1:t})p(x_{1:t})dx_{1:t} \quad (2.26)$$

La expresión recursiva de la ecuación (2.25) es la siguiente:

$$p(x_{1:t}|y_{1:t}) = p(x_{1:t-1}|y_{1:t-1}) \frac{p(x_t|x_{t-1})p(y_t|x_t)}{p(y_t|y_{1:t-1})} \quad (2.27)$$

donde

$$p(y_t|y_{1:t-1}) = \int p(x_{1:t-1}|y_{1:t-1})p(x_t|x_{t-1})p(y_t|x_t)dx_{1:t-1} \quad (2.28)$$

La ecuación (2.27) puede ser descompuesta en dos partes: el paso de actualización del tiempo, conocido como predicción o pronóstico y el paso de actualización de la medición, llamado también corrección o análisis.

El paso de actualización del tiempo o predicción corresponde a la estimación de la distribución de los primeros t estados dadas las primeras $t - 1$ observaciones o mediciones.

$$p(x_{1:t}|y_{1:t-1}) = p(x_{1:t-1}|y_{1:t-1})p(x_t|x_{t-1}) \quad (2.29)$$

El paso de actualización de la medición que corresponde a la corrección de la distribución predicha anteriormente considerando la información de la medición actual.

$$p(x_{1:t}|y_{1:t}) = \frac{p(x_{1:t}|y_{1:t-1})p(y_t|x_t)}{\int p(x_{1:t}|y_{1:t-1})p(y_t|x_t)dx_{1:t}} \quad (2.30)$$

A continuación, se presenta el algoritmo 1, la solución conceptual, filtro de Bayes al problema de la estimación de estados a través de un conjunto de *pdfs* condicionales. En el paso de predicción, la distribución predictiva se obtiene por una combinación de nuestro mejor conocimiento del sistema en el tiempo presente a través de la *pdf* de transición y el conocimiento del sistema en el pasado reciente dado por la *pdf* posterior en el tiempo $t - 1$. Después, en el paso de análisis la *pdf* de filtrado es actualizada

2. CONCEPTOS BÁSICOS EN LA ESTIMACIÓN DE ESTADOS.

basado en la información de una nueva medida de la observación en el tiempo t . La *pdf* predictiva actualizada es referida como la *pdf* filtrada y constituye la *pdf* condicional posterior de interés en el desarrollo de este trabajo.

Algoritmo 1 Filtro de Bayes

Para $t = 1$ a el número de pasos

1. Paso de Predicción:

$$\overbrace{p(x_t|y_{1:t-1})}^{\text{predictivo}} = \int \overbrace{p(x_t|x_{t-1})}^{\text{transición}} p(x_{t-1}|y_{1:t-1}) dx_{t-1}$$

2. Paso de Análisis:

$$\overbrace{p(x_t|y_{1:t})}^{\text{filtrado}} = \frac{\overbrace{p(y_t|x_t)}^{\text{probabilidad}} p(x_t|y_{1:t-1})}{\int p(y_t|x_t) p(x_t|y_{1:t-1}) dx_t}$$

2.9. Métodos de Monte Carlo

Los métodos de Monte Carlo (MC) son un conjunto de algoritmos computacionales basados en muestreos aleatorios para obtener resultados numéricos de problemas complejos. El muestreo aleatorio en los métodos de MC implica la generación de seudonúmeros aleatorios. Números aleatorios verdaderos no es posible obtenerlos por medio de algoritmos implementados en las computadoras. Las técnicas de MC son útiles en escenarios donde es de interés realizar cálculos en los que implícita o explícitamente están presentes una función de densidad de probabilidad p y no se puede aplicar métodos tradicionales debido a la complejidad algebraica. La representación matemática de p es aproximada por una representación muestral.

Sea, la *pdf* $p(x)$ de la cual es posible extraer N muestras aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $\{x^{(i)}; i = 1, \dots, N\}$. Entonces, la *pdf* $p(x)$ puede ser aproximada por la *pdf* empírica $p_N(x)$ como se muestra:

$$p_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x - x^{(i)}) \quad (2.31)$$

donde δ es la función delta de Dirac, definida por:

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = 0, \\ 0 & \text{if } x \neq 0 \end{cases} \quad (2.32)$$

La función delta de Dirac tiene la siguiente propiedad fundamental:

$$\int f(x)\delta(x-c)dx = f(c) \quad (2.33)$$

con $f(x)$ una función de valor del vector y c un vector constante. Esta propiedad permite el mapear integrales para sumas discretas. Considere el problema de estimar el valor esperado $E[f(x)]$ con la función de distribución *pdf* de $f(x)$ dada por $p(x)$. La estimación del valor esperado de $f(x)$ consiste en resolver:

$$E[f(x)] = \int f(x)p(x)dx \quad (2.34)$$

donde la solución aproximada consiste en reemplazar $p(x)$ con su representación muestral presentada en la ecuación 2.31, de tal forma que:

$$E[f(x)] \simeq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \int f(x)\delta(x-x^{(i)}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x^{(i)}) \quad (2.35)$$

La potencia de los métodos o técnicas de MC radica en el hecho que la velocidad a la cual la aproximación converge es independiente de la dimensión del espacio-estado.

Estimación de estados: mínimos cuadrados ponderados y filtros de Kalman

3.1. Introducción

La estimación de estados es ampliamente usada en el seguimiento de la dinámica de los sistemas eléctricos de potencia (SEP) a través de la asimilación de la información del sistema real obtenidos a través de dispositivos apropiados. La estimación de estado es un tópico importante que contribuye a una administración de la energía eléctrica en los centros de control. En este sentido, el modelamiento, la optimización del flujo de potencia, detección de datos malos, análisis de contingencias y acciones correctivas contra posibles fallas en los sistemas de potencia son campos de aplicación donde los métodos de estimación de estados son cruciales [Huang et al. (28)].

Los métodos más aplicados para estudiar la estimación de estados en SEP son: el Filtro de Kalman [Kalman (30)] usado para el análisis de sistemas dinámicos lineales con ruido normalmente distribuido, el Filtro Extendido de Kalman usado a menudo en sistemas no lineales. Además, el Filtro de Kalman “Unscented” [Valverde and Terzija (54)], el Filtro de Ensamble de Kalman [Evensen (21)] y el Filtro de Partículas.

En los inicios del desarrollo de la estimación de estados, el método de los Mínimos Cuadrados Ponderados (WLS) fue el primer método usado para resolver la estimación de estados de los SEP.

Este capítulo presenta un breve desarrollo de la metodología usada en la estimación de estados por el método de Mínimos Cuadrados Ponderados [Hernandez and Maya-Ortiz (26)]. La formulación del Filtro de Kalman como punto de partida de las versiones no lineales de este filtro tales como el Filtro Extendido de Kalman y el Filtro de Ensamble de Kalman. En el siguiente capítulo se hará el estudio del Filtro de Partículas.

3. ESTIMACIÓN DE ESTADOS: MÍNIMOS CUADRADOS PONDERADOS Y FILTROS DE KALMAN

Estas técnicas de aproximación son utilizadas en este manuscrito para realizar estudios de estimación de estados en sistemas eléctricos de potencia.

A continuación, se describe el modelo del sistema basado en las mediciones.

3.2. Modelo del Sistema basado en las mediciones

Tomando en consideración el conjunto de mediciones dadas por el vector z [Abur and Expósito (2)].

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ h_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ h_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} = h(x) + v \quad (3.1)$$

donde:

- z es el vector ($m \times 1$) de las mediciones.
- $h(x)$ es la función no lineal ($m \times n$) que relaciona la medida i al vector de estado x .
- x es el vector de estado verdadero ($n \times 1$) del sistema.
- v es el vector de ruido ($m \times 1$) de las mediciones.
- m es el número de mediciones.
- n es el número de las variables de estado.

Se asume que el vector v es ruido Gaussiano con media cero y típicamente no correlacionado:

- El valor esperado $E(v_i) = 0$, $i = 1, \dots, m$.
- Los errores de la medición son independientes. Esto es:

$$Cov(v) = R = E[v.v^T] = diag(\sigma^2)$$

La desviación estándar σ_i de cada medición i considera la exactitud del dispositivo de medición usado.

3.2.1. La función de medición, $h(x_k)$

De manera general las mediciones utilizadas son los flujos de potencia en las líneas, inyecciones de potencia en las barras, magnitudes de voltaje de barras y magnitudes de flujo de corriente en las líneas. Asumiendo el modelo general de dos puertos π para las líneas, figura 3.1:

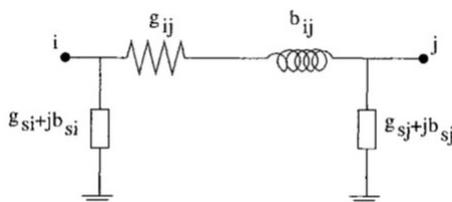


Figura 3.1: Modelo de dos puertos π de líneas de transmisión

- Inyección de potencia activa y reactiva en la barra i :

$$P_i = V_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} V_j (G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij})$$

$$Q_i = V_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} V_j (G_{ij} \sin \theta_{ij} + B_{ij} \cos \theta_{ij})$$

- Flujo de potencia activa y reactiva de la barra i a la barra j :

$$P_{ij} = V_i^2 (g_{si} + g_{ij}) - V_i V_j (g_{ij} \cos \theta_{ij} + b_{ij} \sin \theta_{ij})$$

$$Q_{ij} = -V_i^2 (b_{si} + b_{ij}) - V_i V_j (g_{ij} \sin \theta_{ij} - b_{ij} \cos \theta_{ij})$$

- Magnitud de flujo de corriente de línea de la barra i a la barra j :

$$I_{ij} = \frac{\sqrt{P_{ij}^2 + Q_{ij}^2}}{V_i}$$

donde

V_i, θ_i	es la magnitud de voltaje y ángulo de fase de la barra i .
θ_{ij}	$= \theta_i - \theta_j$.
$G_{ij} + jB_{ij}$	es (ij) ésimo elemento de la matriz de admitancia compleja.
$g_{ij} + jb_{ij}$	es la admitancia del ramal serie que conecta la barra i y j .
$g_{si} + jb_{si}$	es la admitancia del ramal paralelo conectado a la barra i como se indica en la figura 3.1.
\mathcal{N}_i	es el conjunto de números de barras que están directamente conectadas a la barra i .

3.2.2. La matriz Jacobiana de las mediciones, H

En el presente trabajo la estructura de la matriz de medición Jacobiana H utilizada es:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_{iny}}{\partial \theta} & \frac{\partial P_{iny}}{\partial V} \\ \frac{\partial P_{flujo}}{\partial \theta} & \frac{\partial P_{flujo}}{\partial V} \\ \frac{\partial Q_{iny}}{\partial \theta} & \frac{\partial Q_{iny}}{\partial V} \\ \frac{\partial Q_{flujo}}{\partial \theta} & \frac{\partial Q_{flujo}}{\partial V} \\ 0 & \frac{\partial V_{mag}}{\partial V} \end{bmatrix}$$

Las expresiones para cada derivadas parciales son dadas a continuación::

- Mediciones de inyección de potencia activa:

$$\frac{\partial P_i}{\partial \theta_i} = \sum_{j=1}^N V_i V_j (-G_{ij} \sin \theta_{ij} + B_{ij} \cos \theta_{ij}) - V_i^2 B_{ii}$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial \theta_j} = V_i V_j (G_{ij} \sin \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij})$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial V_i} = \sum_{j=1}^N V_j (G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij}) + V_i G_{ii}$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial V_j} = V_i (G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij})$$

- Mediciones de inyección de potencia reactiva:

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \theta_i} = \sum_{j=1}^N V_i V_j (G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij}) - V_i^2 G_{ii}$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \theta_j} = V_i V_j (-G_{ij} \cos \theta_{ij} - B_{ij} \sin \theta_{ij})$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial V_i} = \sum_{j=1}^N V_j (G_{ij} \sin \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij}) - V_i B_{ii}$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial V_j} = V_i (G_{ij} \sin \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij})$$

- Mediciones de flujo de potencia real:

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_{ij}}{\partial \theta_i} &= V_i V_j (g_{ij} \sin \theta_{ij} - b_{ij} \cos \theta_{ij}) \\ \frac{\partial P_{ij}}{\partial \theta_j} &= -V_i V_j (g_{ij} \sin \theta_{ij} - b_{ij} \cos \theta_{ij}) \\ \frac{\partial P_{ij}}{\partial V_i} &= -V_j (g_{ij} \cos \theta_{ij} + b_{ij} \sin \theta_{ij}) + 2(g_{ij} + g_{si}) V_i \\ \frac{\partial P_{ij}}{\partial V_j} &= -V_i (g_{ij} \cos \theta_{ij} + b_{ij} \sin \theta_{ij})\end{aligned}$$

- Mediciones de flujo de potencia reactiva:

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q_{ij}}{\partial \theta_i} &= -V_i V_j (g_{ij} \cos \theta_{ij} + b_{ij} \sin \theta_{ij}) \\ \frac{\partial Q_{ij}}{\partial \theta_j} &= V_i V_j (g_{ij} \cos \theta_{ij} + b_{ij} \sin \theta_{ij}) \\ \frac{\partial Q_{ij}}{\partial V_i} &= -V_j (g_{ij} \sin \theta_{ij} - b_{ij} \cos \theta_{ij}) - 2(b_{ij} + b_{si}) V_i \\ \frac{\partial Q_{ij}}{\partial V_j} &= -V_i (g_{ij} \sin \theta_{ij} - b_{ij} \cos \theta_{ij})\end{aligned}$$

- Mediciones de magnitud de voltaje

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_i}{\partial V_i} &= 1 \\ \frac{\partial V_i}{\partial V_j} &= 0 \\ \frac{\partial V_i}{\partial \theta_i} &= 0 \\ \frac{\partial V_i}{\partial \theta_j} &= 0\end{aligned}$$

3.3. Mínimos cuadrados ponderados - WLS

El método tradicional de los mínimos cuadrados ponderados relaciona el modelo de las mediciones con las variables de estado [Monticelli (35)], [Shabani et al. (45)].

$$z = h(x) + v \tag{3.2}$$

Esta es una función no lineal, donde, z es el vector de mediciones de dimensión $(m \times 1)$, $h(x)$ es el vector $(m \times 1)$ de la función no lineal que relaciona el estado con las mediciones, x es el vector de estado verdadero $(n \times 1)$, v es el vector de ruido de las mediciones $(m \times 1)$,

3. ESTIMACIÓN DE ESTADOS: MÍNIMOS CUADRADOS PONDERADOS Y FILTROS DE KALMAN

m es el número de las mediciones representadas, y n es el número de las variables de estado, v se asume que es el vector de ruido Gaussiano de las mediciones con valor medio cero y típicamente no correlacionados, por lo tanto la matriz de covarianza es:

$$R = E[vv]^T = \text{diag}(\sigma^2) \quad (3.3)$$

donde $E[\cdot]$ es el operador del valor esperado.

La estimación óptima del vector de estado es encontrada minimizando la suma de los residuos al cuadrado ponderados. i es el índice de iteración y $J(x)$ es la función objetivo, como se indica a continuación.

$$J(x) = \sum_{i=1}^m (z_i - h_i(x))^2 / R_{ii} = [z - h(x)]^T R^{-1} [z - h(x)] \quad (3.4)$$

En su valor mínimo, debe satisfacerse las condiciones óptimas de primer orden,

$$g(x) = \frac{\partial J(x)}{\partial x} = -H^T(x)R^{-1}[z - h(x)] = 0 \quad (3.5)$$

H es la matriz Jacobiana de $h(x)$,

$$H = \frac{\partial h(x)}{\partial x} \quad (3.6)$$

Expandiendo la función no lineal $g(x)$ de acuerdo a la serie de Taylor alrededor del vector de estado x_i , despreciando los términos de orden superior y de acuerdo al método de solución de Gauss-Newton,

$$g(x) = g(x_i) + G(x_i)(x - x_i) + \dots = 0 \quad (3.7)$$

$$x_{i+1} = x_i - [G(x_i)]^{-1}g(x_i) \quad (3.8)$$

donde, x_i es el vector solución en la iteración i .

$$G(x_i) = \frac{\partial g(x_i)}{\partial x} = H^T(x_i)R^{-1}H(x_i) \quad (3.9)$$

$$g(x_i) = -H^T(x_i)R^{-1}[z - h(x_i)] \quad (3.10)$$

$G(x)$ es la llamada *matriz de ganancia*. Dado que el sistema es, generalmente, totalmente observable, la matriz es una matriz dispersa o rala, en la cual la mayoría de sus elementos son ceros, definida positiva y simétrica. La matriz $G(x)$ es típicamente no invertible, pero en vez se puede descomponer en sus factores triangulares y las ecuaciones pueden ser resueltas usando sustituciones adelante y hacia atrás en cada iteración i :

$$[G(x_i)]\Delta x_{i+1} = H^T(x_i)R^{-1}[z - h(x_i)] \quad (3.11)$$

donde $\Delta x_{i+1} = x_{i+1} - x_i$.

También, la solución puede ser obtenida como sigue.

$$\Delta x_{i+1} = (H^T(x_i)R^{-1}H(x_i))^{-1}H^T(x_i)R^{-1}\Delta z_i \quad (3.12)$$

$$x_i = (H^T(x_i)R^{-1}H(x_i))^{-1}H^T(x_i)R^{-1}z_i \quad (3.13)$$

3.4. El Filtro discreto de Kalman

3.4.1. Introducción

En este manuscrito, el filtro de Kalman para procesos lineales Gaussianos es derivado desde un marco probabilístico definido en la estimación recursiva Bayesiana. Esta aproximación permite la derivación del filtro de Kalman en términos de su función de densidad de probabilidad antes que de una derivación analítica directa como la de la estimación de mínimos cuadrados en [Grewal and Andrews (24)]. El tipo de sistema considerado es un sistema dinámico lineal estocástico conducido por un proceso Gaussiano y con ruido en las mediciones. Este ruido es ruido blanco Gaussiano, con media cero y no correlacionados para todo t , siendo t el índice de tiempo discreto.

El modelo de espacio-estado es derivado de las ecuaciones 2.15 y 2.16 se presenta a continuación:

$$x_t = F_{t,t-1}x_{t-1} + B_{t-1}u_{t-1} + w_{t-1} \quad (3.14)$$

$$y_t = H_t x_t + v_t \quad (3.15)$$

donde los ruidos presentes en el proceso y en las observaciones están distribuidos de acuerdo a distribuciones Gaussianas:

$$w_t \sim \mathcal{N}(w_t : 0, Q_t) \quad (3.16)$$

$$v_t \sim \mathcal{N}(v_t : 0, R_t) \quad (3.17)$$

donde la notación $\mathcal{N}(x_t : \mu, \Sigma)$ es usada para representar una distribución Gaussiana con x el vector aleatorio con media μ y una matriz de covarianza Σ . Las propiedades del vector aleatorio son las siguientes:

$$E[w_t] = 0 \quad , \quad E[v_t] = 0, \quad (3.18)$$

$$E[w_t w_{t+k}^T] = 0 \quad , \quad E[w_t w_t^T] = Q_t, \quad (3.19)$$

$$E[v_t v_{t+k}^T] = 0 \quad , \quad E[v_t v_t^T] = R_t, \quad (3.20)$$

$$E[w_t v_{t+k}^T] = 0 \quad , \quad E[w_t v_t^T] = 0 \quad (3.21)$$

donde Q y R son matrices de covarianzas definidas positivas para los ruidos del proceso y las observaciones, y k es un número entero positivo.

3.4.2. Estimación recursiva Bayesiana en el desarrollo del Filtro de Kalman

El algoritmo recursivo se deriva de la información disponible del paso previo [Zhao and Mili (59)]. La expresión siguiente se valida en las propiedades Gaussianas del sistema estocástico bajo estudio.

$$p(x_{t-1} | y_{1:t-1}) = \mathcal{N}(x_{t-1} : x_{t-1}^a, P_{t-1}^a) \quad (3.22)$$

3. ESTIMACIÓN DE ESTADOS: MÍNIMOS CUADRADOS PONDERADOS Y FILTROS DE KALMAN

donde x_{t-1} es el vector de estado verdadero, x_{t-1}^a y P_{t-1}^a son el vector de estado y la matriz de covarianza obtenidos del paso de análisis al tiempo $t-1$. El paso de análisis se lo presentará posteriormente. Al momento se considera que x_{t-1}^a y P_{t-1}^a son conocidos.

3.4.2.1. Paso de predicción

De acuerdo al filtro de Bayes que se presenta en el algoritmo 1, el primer paso en la derivación del filtro óptimo es el cálculo de la *pdf* anterior al tiempo t :

$$p(x_t|y_{1:t-1}) = \int p(x_t|x_{t-1})p(x_{t-1}|y_{1:t-1})dx_{t-1} \quad (3.23)$$

En la ecuación 3.23, la *pdf* anterior se determina por la *pdf* de transición y la *pdf* de filtrado (posterior). Se puede decir que, la *pdf* anterior es calculada sobre la base de la información disponible que es conocida, p. ej. la información obtenida del modelo y la información estimada la cual se obtiene un paso atrás. La *pdf* de filtrado al tiempo $t-1$ se presentó en la ecuación 3.22 y la *pdf* de transición es calculada de 3.14, como sigue:

$$p(x_t|x_{t-1}) = \mathcal{N}(x_t : F_{t,t-1}\bar{x}_{t-1}, Q_t) \quad (3.24)$$

donde \bar{x}_{t-1} es el valor esperado $E[x_{t-1}]$ del vector de estado x_{t-1} . El término correspondiente a la señal de control o de forzado en la ecuación 3.14 no es considerado en la derivación por claridad de cálculo. Por otra parte, la ausencia de este término no afecta en la formulación, por lo que este término no será considerado en adelante. La *pdf* predictiva (ecuación 3.23) es Gaussianamente distribuida cuando las densidades Gaussianas en las ecuaciones 3.22 y 3.24 son substituidas por la función exponencial de las *pdfs* y después de realizar algunas operaciones algebraicas matriciales. Los estadísticos de la *pdf* predictiva se muestran a continuación.

$$x_t^f = F_{t,t-1}x_{t-1}^a, \quad (3.25)$$

$$P_t^f = F_{t,t-1}P_{t-1}^aF_{t,t-1}^T + Q_t \quad (3.26)$$

con x_t^f el vector de estado predicho y P_t^f la matriz covarianza del error predicho $P_t^f = E[x_t^f - \bar{x}_t][x_t^f - \bar{x}_t]^T$.

3.4.2.2. Paso de análisis

En el paso de análisis, la *pdf* anterior es actualizada con la última medición que se obtiene al tiempo t . De acuerdo al algoritmo 1, la actualización de la *pdf* anterior es dada por la ecuación 3.27.

$$p(x_t|y_{1:t}) = \frac{p(y_t|x_t)p(x_t|y_{1:t-1})}{\int p(y_t|x_t)p(x_t|y_{1:t-1})dx_t} \quad (3.27)$$

La *pdf* anterior es actualizada con la información de la probabilidad de la *pdf*. En este caso la probabilidad es distribuida Gaussianamente, así que:

$$p(y_t|x_t) = \mathcal{N}(y_t : H_t\bar{x}_t, R_t) \quad (3.28)$$

Sustituyendo la ecuación 3.28 en la ecuación 3.27, se obtiene la siguiente expresión:

$$p(x_t|y_{1:t}) = \frac{\mathcal{N}(y_t : H_t\bar{x}_t, R_t)\mathcal{N}(x_t : x_t^f, P_t^f)}{\int \mathcal{N}(y_t : H_t\bar{x}_t, R_t)\mathcal{N}(x_t : x_t^f, P_t^f)dx_t} \quad (3.29)$$

La integración del denominador en ecuación 3.29 es distribuida Gaussianamente, por lo que:

$$\int \mathcal{N}(y_t : H_t\bar{x}_t, R_t)\mathcal{N}(x_t : x_t^f, P_t^f)dx_t = \dots \mathcal{N}(y_t; H_t x_t^f, H_t P_t^f H_t^T + R_t) \quad (3.30)$$

La ecuación 3.29 puede ser reducida a

$$p(x_t|y_{1:t}) = \mathcal{N}(x_t : x_t^a, P_t^a) \quad (3.31)$$

donde

$$x_t^a = x_t^f + K_t(y_t - H_t x_t^f), \quad (3.32)$$

$$P_t^a = P_t^f - K_t H_t P_t^f, \quad (3.33)$$

con

$$K_t = P_t^f H_t^T [H_t P_t^f H_t^T + R_t]^{-1} \quad (3.34)$$

Los pasos recursivos del Filtro de Kalman para un sistema lineal Gaussiano se resumen a continuación. El algoritmo 2 es la solución óptima al problema de estimación de estados para procesos Gaussianos del tipo descrito en las ecuaciones 3.14 - 3.21.

La solución analítica de las funciones de densidad de probabilidades predictiva y de filtrado (análisis) es posible dadas las descripciones completas de estas *pdfs* por medio de sus valores medios y covarianzas. El estado actualizado x_t^a está dado por la adición del paso de predicción x_t^f y los residuos $(y_t - H_t x_t^f)$ ponderados. Los residuos son ponderados por medio de la ganancia de Kalman K_t . Para un cálculo apropiado de la ganancia de Kalman, las matrices de covarianza del error (P_t^a, P_t^f) deben ser simétricas y definidas positivas.

3.5. El Filtro Extendido de Kalman

3.5.1. Introducción

La observación y la estimación de estado posterior es en naturaleza un trabajo complejo debido a que la mayoría de los problemas de estimación no son lineales.

3. ESTIMACIÓN DE ESTADOS: MÍNIMOS CUADRADOS PONDERADOS Y FILTROS DE KALMAN

Algoritmo 2 Filtro discreto de Kalman

Para $t = 1$ al número de pasos.

1. Paso de predicción:

$$x_t^f = F_{t,t-1}x_{t-1}^a$$

$$P_t^f = F_{t,t-1}P_{t-1}^a F_{t,t-1}^T + Q_t$$

2. Paso de análisis:

$$K_t = P_t^f H_t^T [H_t P_t^f H_t^T + R_t]^{-1}$$

$$x_t^a = x_t^f + K_t(y_t - H_t x_t^f)$$

$$P_t^a = P_t^f - K_t H_t P_t^f$$

El filtro extendido de Kalman (EKF) extiende el ámbito de aplicación del Filtro de Kalman a los problemas de filtrado óptimos no lineales por medio de una aproximación Gaussiana de la distribución conjunta de la variable de estado x y las mediciones u observaciones y , usando una transformación basada en las series de Taylor. Entonces, es posible aplicar métodos de la teoría de estimación lineal, por ejemplo, el filtro de Kalman, después la linealización del sistema alrededor de una trayectoria nominal, que en algunos casos es conocida, con lo que se puede calcular la ganancia de Kalman. En otros casos, la trayectoria nominal no es conocida previamente, se la puede ir definiendo en cada paso de tiempo como la mejor estimación de la trayectoria actual. Una de las mayores desventajas es la adición de costo computacional de linealización alrededor de una trayectoria desconocida. Esta aproximación es la denominada Filtro Extendido de Kalman [Shabani et al. (45)].

El siguiente sistema no lineal se considera en la derivación del EKF usando la estimación recursiva Bayesiana:

$$x_t = f_{t,t-1}(x_{t-1}) + w_t \quad (3.35)$$

$$y_t = h_t(x_t) + v_t \quad (3.36)$$

Las distribuciones y estadísticos de los ruidos del proceso y de las observaciones se presentan a continuación:

$$w_t \sim \mathcal{N}(w_t : 0, Q_t) \quad (3.37)$$

$$v_t \sim \mathcal{N}(v_t : 0, R_t) \quad (3.38)$$

$$E[w_t] = 0 \quad , \quad E[v_t] = 0, \quad (3.39)$$

$$E[w_t w_{t+k}^T] = 0 \quad , \quad E[w_t w_t^T] = Q_t, \quad (3.40)$$

$$E[v_t v_{t+k}^T] = 0 \quad , \quad E[v_t v_t^T] = R_t, \quad (3.41)$$

$$E[w_t v_{t+k}^T] = 0 \quad , \quad E[w_t v_t^T] = 0 \quad (3.42)$$

Los ruidos son blancos, Gaussianamente distribuido con media cero y no correlacionados $\forall t$ con $k \geq 0$.

3.5.2. Estimación recursiva Bayesiana en el desarrollo del filtro de Kalman extendido

Considerando que el sistema no es lineal, se lo linealiza antes del paso de análisis. La función de densidad de probabilidad (*pdf*) al tiempo $t - 1$ puede ser aproximado por una distribución Gaussiana:

$$p(x_{t-1}|y_{1:t-1}) = \mathcal{N}(x_{t-1} : x_{t-1}^a, P_{t-1}^a) \quad (3.43)$$

La diferencia principal entre la ecuación 3.22 y la ecuación 3.43 es el estado en si mismo. En la ecuación 3.22, x_t representa toda la trayectoria posible del estado, mientras que en la ecuación 3.43, el estado representa la trayectoria particular del estado al cual el sistema es linealizado. Por otra parte, la distribución posterior es aproximada como una distribución Gaussiana.

3.5.2.1. Paso de predicción

El paso posterior está dado por el cálculo de la función de densidad de probabilidad predictiva:

$$p(x_t|y_{1:t-1}) = \int p(x_t|x_{t-1})p(x_{t-1}|y_{1:t-1})dx_{t-1} \quad (3.44)$$

La *pdf* posterior en el tiempo $t-1$ está dada por la ecuación 3.43. La *pdf* de transición en el lado derecho de la ecuación 3.44 puede ser obtenida de la ecuación 3.35. Considerando que esta *pdf* sigue una distribución Gaussiana:

$$p(x_t|x_{t-1}) = \mathcal{N}(x_t : E[f_{t,t-1}(x_{t-1})], Q_t), \quad (3.45)$$

Así, la *pdf* predictiva está definida como:

$$p(x_t|y_{1:t-1}) = \int \mathcal{N}(x_{t-1} : x_{t-1}^a, P_{t-1}^a) \mathcal{N}(x_t : E[f_{t,t-1}(x_{t-1})], Q_t) dx_{t-1} \quad (3.46)$$

La resolución de la integral en la ecuación 3.46 es complicada debido a la presencia de la función no lineal $f_{t,t-1}(\cdot)$. Para obtener una solución analítica como en el caso del filtro discreto de Kalman (Ecuaciones 3.25 and 3.26) la formulación del problema debe modificarse. La aproximación adoptada para la linealización del filtro extendido de Kalman es la serie de Taylor. Adicionalmente, la trayectoria del estado debe ser definida alrededor de la trayectoria en la cual la función es linealizada. En este punto del desarrollo del filtro extendido de Kalman, el mejor estado estimado esta dado por x_{t-1}^a .

3. ESTIMACIÓN DE ESTADOS: MÍNIMOS CUADRADOS PONDERADOS Y FILTROS DE KALMAN

Las series de expansión de Taylor de $f_{t,t-1}(x_{t-1})$ en la vecindad de $x_{t-1}^a = E[x_{t-1}|y_{1:t-1}]$ es considerada en la linealización del sistema. Para la aproximación lineal solo los dos primeros términos son considerados:

$$f_{t,t-1}(x_{t-1}) \simeq f_{t,t-1}(x_{t-1}^a) + F_{t,t-1}[x_{t-1} - x_{t-1}^a] \quad (3.47)$$

donde

$$F_{t,t-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{m_x}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{m_x}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_{m_x}}{\partial x_{m_x}} \end{bmatrix} \Big|_{(x_{t-1}^a)} \quad (3.48)$$

es una matriz Jacobiana con dimensión $(m_x \times m_x)$. El lado derecho de la ecuación 3.47 es desarrollada como sigue:

$$F_{t,t-1}x_{t-1} + f_{t,t-1}(x_{t-1}^a) + F_{t,t-1}x_{t-1}^a \quad (3.49)$$

donde, el primer término es lineal con respecto a x_{t-1} . Los siguientes dos términos son valores conocidos. La substitución de la ecuación 3.47 en la ecuación 3.46,

$$\begin{aligned} p(x_t|y_{1:t-1}) &= \int \mathcal{N}(x_{t-1} : x_{t-1}^a, P_{t-1}^a) \cdots \\ &\quad \mathcal{N}(x_{t-1} : f_{t,t-1}(x_{t-1}^a) \cdots \\ &\quad + F_{t,t-1}[x_{t-1} - x_{t-1}^a], Q_t) dx_{t-1} \end{aligned} \quad (3.50)$$

permite la solución analítica de la integral. La *pdf* anterior puede ser obtenida en su forma Gaussiana como:

$$p(x_t|y_{1:t-1}) = \mathcal{N}(x_t : x_t^f, P_t^f) \quad (3.51)$$

Aunque la *pdf* anterior es representada por una distribución Gaussiana, es importante remarcar que el hecho que esta representación es una aproximación alrededor de una trayectoria nominal, en otras palabras, es una aproximación de la *pdf* verdadera la cual no es explícitamente conocida. El vector de estado predicho x_t^f y la matriz de covarianza del error predicho P_t^f son muy similares como en el KF y están dados por:

$$x_t^f = f_{t,t-1}(x_{t-1}^a) \quad (3.52)$$

$$P_t^f = F_{t,t-1}P_{t-1}^a F_{t,t-1}^T + Q_t \quad (3.53)$$

El vector de estado predicho es obtenido por la propagación del estado a través del modelo no lineal. Para el cálculo de la matriz de covarianza se usa la matriz Jacobiana $F_{t,t-1}$.

3.5.2.2. Paso de análisis

El paso de análisis consiste en la actualización de la *pdf* anterior de acuerdo a:

$$p(x_t|y_{1:t}) = \frac{p(y_t|x_t)p(x_t|y_{1:t-1})}{\int p(y_t|x_t)p(x_t|y_{1:t-1})dx_t} \quad (3.54)$$

En el filtro extendido de Kalman, la *pdf* anterior es aproximada por una distribución Gaussiana caracterizada por la media 3.52 y la covarianza 3.53. El valor de la probabilidad de la *pdf* es obtenida de la ecuación 3.36 considerando que esta *pdf* es Gaussiana.

$$p(y_t|x_t) = \mathcal{N}(y_t : E[h_t(x_t)], R_t) \quad (3.55)$$

Substituyendo 3.51 y 3.55 en 3.54, la *pdf* de filtrado a análisis está dada por:

$$p(x_t|y_{1:t}) = \frac{\mathcal{N}(y_t : E[h_t(x_t)], R_t)\mathcal{N}(x_t : x_t^f, P_t^f)}{\int \mathcal{N}(y_t : E[h_t(x_t)], R_t)\mathcal{N}(x_t : x_t^f, P_t^f)dx_t} \quad (3.56)$$

donde el primer problema para calcular la *pdf* de filtrado es resolver la integral del denominador. Para encontrar una solución analítica, el sistema de observación debe ser linealizado alrededor de una trayectoria. En este punto x_t^f es la mejor estimación del estado, de tal manera que el sistema de observación no lineal es linealizado por medio de la expansión de las series de Taylor en el vecindario de x_t^f . La función no lineal se expande como sigue:

$$h_t(x_t) \simeq h_t(x_t^f) + H_t[x_t - x_t^f] \quad (3.57)$$

donde H_t es una matriz Jacobiana de dimensión $(m_y \times m_x)$ dada por::

$$H_t = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_{m_x}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_{m_y}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_{m_y}}{\partial x_{m_x}} \end{bmatrix} \Big|_{(x_t^f)} \quad (3.58)$$

Substituyendo 3.57 en 3.56, la expresión para la *pdf* posterior es:

$$p(x_t|y_{1:t}) = \frac{\mathcal{N}(y_t : h_t(x_t^f) + H_t[x_t - x_t^f], R_t)\mathcal{N}(x_t : x_t^f, P_t^f)}{\int \mathcal{N}(y_t : h_t(x_t^f) + H_t[x_t - x_t^f], R_t)\mathcal{N}(x_t : x_t^f, P_t^f)dx_t} \quad (3.59)$$

Ahora, la solución de la integral del denominador de la ecuación 3.56 es posible, resultando que la expresión de la *pdf* posterior en términos de una distribución es:

$$p(x_t|y_{1:t}) = \mathcal{N}(x_t^a, P_t^a); \quad (3.60)$$

con

$$x_t^a = x_t^f + K_t(y_t - h_t(x_t^f)), \quad (3.61)$$

$$P_t^a = P_t^f - K_t H_t P_t^f, \quad (3.62)$$

y

$$K_t = P_t^f H_t^T [H_t P_t^f H_t^T + R_t]^{-1} \quad (3.63)$$

El Filtro Extendido de Kalman se describe en el algoritmo 3. En el algoritmo, las funciones de densidad de probabilidades involucradas en la estimación son representadas por sus estadísticos, de primer y segundo momento. Aunque esta caracterización puede no ser suficiente para un sistema específico. Sin embargo, el EKF presenta buenos resultados en un amplio rango de aplicaciones.

3. ESTIMACIÓN DE ESTADOS: MÍNIMOS CUADRADOS PONDERADOS Y FILTROS DE KALMAN

Algoritmo 3 Filtro extendido de Kalman

Para $t = 1$ al número de pasos.

1. Paso de predicción:

$$x_t^f = f_{t,t-1}(x_{t-1}^a)$$

$$P_t^f = F_{t,t-1}P_{t-1}^a F_{t,t-1}^T + Q_t$$

2. Paso de análisis:

$$K_t = P_t^f H_t^T [H_t P_t^f H_t^T + R_t]^{-1}$$

$$x_t^a = x_t^f + K_t(y_t - h_t(x_t^f))$$

$$P_t^a = P_t^f - K_t H_t P_t^f$$

3.6. Filtro de Ensemble de Kalman

3.6.1. Introducción

El Filtro de Ensemble de Kalman (EnKF por sus iniciales en inglés) fue introducido originalmente por Evensen [Evensen (21)] para la estimación de estados en problemas de predicciones meteorológicas donde los modelos numéricos son altamente no lineales y de naturaleza caótica. Básicamente, el filtro de ensemble de Kalman consiste en la linealización del sistema no lineal alrededor de la trayectoria nominal del estado y la posterior aproximación de las funciones de densidad de probabilidades (*pdfs*) como Gaussianas [Liu et al. (33)].

3.6.2. Estimación recursiva Bayesiana en el desarrollo del filtro de Kalman de ensemble

Considere el siguiente modelo no lineal:

$$x_t = f_{t,t-1}(x_{t-1}) + w_t \quad (3.64)$$

$$y_t = h_t(x_t) + v_t \quad (3.65)$$

donde las distribuciones y estadísticos del proceso y las observaciones son:

$$w_t \sim \mathcal{N}(w_t : 0, Q_t) \quad (3.66)$$

$$v_t \sim \mathcal{N}(v_t : 0, R_t) \quad (3.67)$$

$$E[w_t] = 0 \quad , \quad E[v_t] = 0, \quad (3.68)$$

$$E[w_t w_{t+k}^T] = 0 \quad , \quad E[w_t w_t^T] = Q_t, \quad (3.69)$$

$$E[v_t v_{t+k}^T] = 0 \quad , \quad E[v_t v_t^T] = R_t, \quad (3.70)$$

$$E[w_t v_{t+k}^T] = 0 \quad , \quad E[w_t v_t^T] = 0 \quad (3.71)$$

con ruido blanco, Gaussianamente distribuidos con media cero y no correlacionados $\forall t$ con $k \geq 0$. Estas afirmaciones no son siempre reales, pero reducen la complejidad en la formulación del EnKF.

3.6.2.1. Paso de predicción

El EnKF es un filtro recursivo donde el paso de predicción en el instante t se lleva a cabo basado en la información obtenida del paso de análisis en el instante $t - 1$. La metodología descansa en la representación del ensemble de partículas de las *pdfs* predictiva y de filtrado, que son conocidas como ensemble de predicción y ensemble de análisis para los pasos predictivos y de análisis respectivamente. Considere la representación de las muestras de la *pdf* posterior al tiempo $t - 1$:

$$p(x_{t-1} | y_{1:t-1}) \simeq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x_{t-1} - x_{t-1,i}^a) \quad (3.72)$$

con $X_{t-1}^a = \{x_{t-1,i}^a : i = 1, \dots, N\}$ el conjunto de muestras de ensemble del paso de análisis y considerando que la *pdf* de transición es Gaussianamente distribuida:

$$p(x_t | x_{t-1}) = \mathcal{N}(x_t : E[f_{t,t-1}(x_{t-1})], Q_t), \quad (3.73)$$

entonces la *pdf* predictiva es aproximada por:

$$p(x_t | y_{1:t-1}) \simeq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathcal{N}(x_t : E[f_{t,t-1}(x_{t-1,i}^a)], Q_t) \quad (3.74)$$

la cual es una suma de *pdfs* Gaussianas. El conjunto de partículas de ensemble para el paso de predicción se obtienen con la propagación del conjunto de partículas de ensemble del paso de análisis en $t - 1$ a través del modelo no lineal:

$$x_{t,i}^f = f_{t,t-1}(x_{t-1,i}^a), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (3.75)$$

3. ESTIMACIÓN DE ESTADOS: MÍNIMOS CUADRADOS PONDERADOS Y FILTROS DE KALMAN

Entonces, es posible calcular la media y la covarianza de la *pdf* aproximada predictiva en la ecuación 3.74 mediante la media de la muestra y la covarianza de la muestra:

$$x_t^f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{t,i}^f \quad (3.76)$$

$$P_t^f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_{t,i}^f - x_t^f)(x_{t,i}^f - x_t^f)^T \quad (3.77)$$

Un importante hecho de la representación muestral de la *pdf* predictiva es la posibilidad de explorar un amplio rango de espacios de estado antes que una exploración local tal como en el caso del filtro extendido de Kalman. Otra ventaja es el incremento en la eficiencia computacional al evitar la evaluación de matrices Jacobianas.

3.6.2.2. Paso de análisis

En el paso de análisis, la *pdf* anterior es actualizada de acuerdo a la *pdf* posterior.

$$p(x_t|y_{1:t}) = \frac{p(y_t|x_t)p(x_t|y_{1:t-1})}{\int p(y_t|x_t)p(x_t|y_{1:t-1})dx_t} \quad (3.78)$$

Usando las ecuaciones 3.65 y 3.67 el valor de la probabilidad de la *pdf* se la puede representar por una distribución Gaussiana:

$$p(y_t|x_t) = \mathcal{N}(y_t : E[h_t(x_t)], R_t) \quad (3.79)$$

De las ecuaciones 3.76 y 3.77, la *pdf* anterior es una *pdf* Gaussiana que resulta de la suma de N *pdfs* Gaussianas (Ecuación 3.74):

$$p(x_t|y_{1:t-1}) = \mathcal{N}(x_t : x_t^f, P_t^f) \quad (3.80)$$

Entonces, la *pdf* posterior está dada por:

$$p(x_t|y_{1:t}) = \frac{\mathcal{N}(y_t : E[h_t(x_t)], R_t)\mathcal{N}(x_t : x_t^f, P_t^f)}{\int \mathcal{N}(y_t : E[h_t(x_t)], R_t)\mathcal{N}(x_t : x_t^f, P_t^f)dx_t} \quad (3.81)$$

La ecuación 3.81 presenta la función no lineal $h(\cdot)$ que puede no permitir una solución formal de la integral de su denominador. El proceso de linealización a seguir es similar al realizado en el caso del EKF. La linealización del sistema de observación y la aproximación de la *pdf* posterior como Gaussiana. La linealización se basa en la evaluación de la matriz Jacobiana H_t (Ecuación 3.58) sobre la mejor estimación de la trayectoria del estado, en este caso la mejor estimación corresponde a x_t^f . Siguiendo este procedimiento, la *pdf* posterior se representa a continuación:

$$p(x_t|y_{1:t}) = \mathcal{N}(x_t^a, P_t^a); \quad (3.82)$$

con

$$K_t = P_t^f H_t^T [H_t P_t^f H_t^T + R_t]^{-1} \quad (3.83)$$

$$x_t^a = x_t^f + K_t (y_t - h_t(x_t^f)), \quad (3.84)$$

$$P_t^a = P_t^f - K_t H_t P_t^f, \quad (3.85)$$

A diferencia de la derivación del EKF, un conjunto de partículas de ensamble X_t^a debe ser generado para el cálculo de partículas para el ensamble de la *pdf* de predicción (ecuación 3.75). Una manera de generar el conjunto de partículas de ensamble para el paso de análisis puede ser muestreando la *pdf* posterior (ecuación 3.82):

$$x_{t,i}^a \sim \mathcal{N}(x_t | y_{1:t} : x_t^a, P_t^a); \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.86)$$

Una posible fuente de error en esta aproximación puede ser la no apropiada representación del ensamble de la *pdf* de análisis debido a la introducción de errores en la generación de los números aleatorios. Otra metodología ampliamente usada es usar los métodos de Monte Carlo en la aproximación del sistema de observación. A continuación se presentan algunas expresiones usadas en los métodos de Monte Carlo. La media de la muestra del ensamble de partículas de la observación modelada:

$$y_t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h_t(x_{t,i}^f), \quad (3.87)$$

la covarianza cruzada entre el ensamble de predicción y el ensamble de la observación modelada:

$$P_t^{xy} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_{t,i}^f - x_t^f)(h_t(x_{t,i}^f) - y_t)^T, \quad (3.88)$$

y la covarianza del ensamble de observación modelada:

$$P_t^{yy} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (h_t(x_{t,i}^f) - y_t)(h_t(x_{t,i}^f) - y_t)^T, \quad (3.89)$$

Las expresiones 3.88 y 3.89 permiten una formulación de la ganancia de Kalman y de la covarianza del ensamble de análisis libre de derivadas:

$$K_t = P_t^{xy} (P_t^{yy} + R_t)^{-1} \quad (3.90)$$

$$P_t^a = P_t^f - K_t (P_t^{xy})^T \quad (3.91)$$

Una formulación detallada de esta aproximación es presentada en [Houtekamer and Mitchell (27)]. Como se puede ver en la ecuación 3.90, el cómputo de la ganancia de Kalman no depende de la matriz de covarianza de predicción, ni de la matriz de covarianza de análisis del paso anterior. En la práctica no es necesario evaluar las covarianzas P_t^f y P_t^a en las ecuaciones 3.77 y 3.91. Con el cómputo de la ganancia de Kalman basada en las covarianzas muestrales, diferentes tipos de ruidos de procesos

3. ESTIMACIÓN DE ESTADOS: MÍNIMOS CUADRADOS PONDERADOS Y FILTROS DE KALMAN

pueden ser considerados en la aplicación del EnKF. La aproximación presentada en [Burgers et al. (7)] se adopta para la generación del ensamble o conjunto de partículas en el paso de análisis. Esta aproximación consiste en la generación de observaciones subrogadas $Y_t^s = y_{t,i}^s; i = 1, \dots, N$ donde, $y_{t,i}$ son muestras aleatorias extraídas de la distribución Gaussiana con media y_t y covarianza R_t , como se muestra a continuación:

$$y_{t,i}^s \sim \mathcal{N}(y_t : y_t, R_t); \quad (3.92)$$

El ensamble de análisis es obtenido reemplazando la observación por un conjunto de observaciones subrogadas en la ecuación 3.84:

$$x_{t,i}^a = x_t^f + K_t(y_{t,i}^s - h_t(x_t^f)), \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.93)$$

La ecuación 3.93 indica que todo los elementos del ensamble de un estado particular son actualizados por la misma ganancia de Kalman, pero con un término de innovación diferente. Para tomar en consideración posibles errores de muestreo en la generación de las observaciones subrogadas, la matriz de covarianza de la observación puede ser reemplazada por la covarianza de las muestras, y usarlas en el cálculo de la ganancia de Kalman.

$$R_t^s = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_{t,i}^s - y_t)(y_{t,i}^s - y_t)^T, \quad (3.94)$$

El algoritmo del EnKF se presenta a continuación: El algoritmo del Filtro de Ensamble de Kalman 4 se lo refiere como un método estocástico, debido a que en la implementación del filtro las observaciones subrogadas son obtenidas estocásticamente para la generación del ensamble de partículas.

Algoritmo 4 Filtro de Ensemble de Kalman

Para $t = 1$ al número de pasos

1. Paso de predicción:

$$\begin{aligned}x_{t,i}^f &= f_{t,t-1}(x_{t-1,i}^a), \quad i = 1, 2, \dots, N, \\x_t^f &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{t,i}^f \\y_t &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h_t(x_{t,i}^f), \\P_t^{xy} &= \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_{t,i}^f - x_t^f)(h_t(x_{t,i}^f) - y_t)^T, \\P_t^{yy} &= \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (h_t(x_{t,i}^f) - y_t)(h_t(x_{t,i}^f) - y_t)^T,\end{aligned}$$

2. Paso de análisis:

$$\begin{aligned}y_{t,i}^s &\sim \mathcal{N}(y_t : y_t, R_t); \\R_t^s &= \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_{t,i}^s - y_t)(y_{t,i}^s - y_t)^T, \\K_t &= P_t^{xy} (P_t^{yy} + R_t)^{-1} \\x_{t,i}^a &= x_t^f + K_t(y_{t,i}^s - h_t(x_t^f)), \quad i = 1, \dots, N.\end{aligned}$$

Estimación de estados: filtro de partículas

4.1. Introducción

El algoritmo para el muestreo secuencial por importancia, SIS (Sequential Importance Sampling) por sus siglas en inglés, es un método que forma parte de la base para la mayoría de los filtros de Monte Carlo (MC) secuenciales desarrollados [Doucet et al. (17)], esta aproximación es conocida como filtro de partículas [Carpenter et al. (8)]. Es una técnica para la implementación del filtro recursivo Bayesiano por medio de simulaciones de MC [Arulampalam et al. (5)], [Doshi and Chankaya (15)], [Zhou et al. (63)]. La idea es representar la función de densidad posterior (pdf) requerida por un conjunto de muestras aleatorias con pesos asociados y calcular las estimaciones basadas en estas muestras y pesos. El número de muestras es grande, esta caracterización de MC es una representación equivalente a la descripción funcional usual de la pdf posterior y el filtro SIS aproxima la estimación óptima Bayesiana.

4.2. Simulación de Monte Carlo

El método de simulación de Monte Carlo fue introducido en la sección 2.9. El método de Monte Carlo se usará en la aproximación de la función de densidad posterior. Sea N el número de muestras de la función de densidad posterior. Las muestras aleatorias a usar en la aproximación de las funciones de densidad son referidas como partículas.

$$x_{0:t,i} \sim p(x_{0:t}|y_{1:t}); \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.1)$$

De acuerdo a la ecuación 2.31 la *pdf* posterior se la puede estimar empíricamente:

$$p_N(x_{0:t}|y_{1:t}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x_{0:t} - x_{0:t,i}) \quad (4.2)$$

El valor esperado para cualquier función:

$$E[g(x_{0:t})] = \int g(x_{0:t})p(x_{0:t}|y_{1:t})d_{x_{0:t}} \quad (4.3)$$

se lo puede representar de la siguiente forma:

$$\overline{E[g(x_{0:t})]} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(x_{0:t,i}) \quad (4.4)$$

Las partículas $x_{t,i}$ deben ser independientes e idénticamente distribuidas (*idd*) para que la aproximación sea válida. De acuerdo a la ley de convergencia de los números:

$$\overline{E[g(x_{0:t})]} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} E[g(x_{0:t})] \quad (4.5)$$

El símbolo $\xrightarrow{N \rightarrow \infty}$ denota una alta convergencia segura. La ecuación 4.5 indica que el valor esperado del conjunto de partículas converge al valor verdadero cuando se incrementa el número de partículas. Además, de acuerdo al teorema de límite central y si la varianza de $g(x_t)$ es limitada ($var(g(x_t))$) la aproximación del error converge a una distribución Gaussiana con media cero:

$$\sqrt{N} \left(\overline{E[g(x_{0:t})]} - E[g(x_{0:t})] \right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \mathcal{N}(0, var(g(x_{0:t}))) \quad (4.6)$$

4.3. Muestreo por importancia

El muestreo por importancia es una metodología que facilita el muestreo sobre una distribución desconocida. La metodología consiste en el muestreo sobre una distribución conocida propuesta $q(x_t|y_{1:t})$. Esta distribución propuesta es referida como la distribución de importancia. Se recomienda que el muestreo sobre la distribución propuesta sea de fácil realización. La aproximación del muestreo de importancia para el valor esperado según la ecuación 4.3 se encuentra y se expresa a continuación: la función de densidad propuesta se inserta en 4.3.

$$E[g(x_{0:t})] = \int g(x_{0:t}) \frac{p(x_{0:t}|y_{1:t})}{q(x_{0:t}|y_{1:t})} q(x_{0:t}|y_{1:t}) d_{x_{0:t}} \quad (4.7)$$

En la ecuación 4.7, $x_{0:t}$ representa la trayectoria completa del vector de estado. La *pdf* posterior desconocida es reemplazada considerando el teorema de Bayes.

$$E[g(x_{0:t})] = \int g(x_{0:t}) \frac{p(y_{1:t}|x_t)p(x_{0:t})}{p(y_{1:t})q(x_{0:t}|y_{1:t})} q(x_{0:t}|y_{1:t}) d_{x_{0:t}} \quad (4.8)$$

Se simplifica la ecuación 4.8 agrupando las *pdf*:

$$w(x_{0:t}) = \frac{p(y_{1:t}|x_{0:t})p(x_{0:t})}{q(x_{0:t}|y_{1:t})} \quad (4.9)$$

siendo $w(x_{0:t})$ el peso de importancia no normalizado. La nueva expresión para el valor esperado con los reemplazos considerados es la siguiente:

$$E[g(x_{0:t})] = \int g(x_{0:t}) \frac{w(x_{0:t})}{p(y_{1:t})} q(x_{0:t}|y_{1:t}) dx_{0:t} \quad (4.10)$$

La pdf $p(y_{1:t})$ no conocida que normaliza 4.10 se desarrolla a continuación:

$$\begin{aligned} E[g(x_{0:t})] &= \frac{1}{p(y_{1:t})} \int g(x_{0:t}) w(x_{0:t}) q(x_{0:t}|y_{1:t}) dx_{0:t} \\ &= \frac{\int g(x_{0:t}) w(x_{0:t}) q(x_{0:t}|y_{1:t}) dx_{0:t}}{\int p(y_{1:t}|x_{0:t}) p(x_{0:t}) \frac{q(x_{0:t}|y_{1:t})}{q(x_{0:t}|y_{1:t})} dx_{0:t}} \\ &= \frac{\int g(x_{0:t}) w(x_{0:t}) q(x_{0:t}|y_{1:t}) dx_{0:t}}{\int w(x_{0:t}) q(x_{0:t}|y_{1:t}) dx_{0:t}} \end{aligned} \quad (4.11)$$

La ecuación 4.11 se representa como la relación entre dos valores esperados:

$$E[g(x_{0:t})] = \frac{E_{q(x_{0:t}|y_{1:t})}[w(x_{0:t})g(x_{0:t})]}{E_{q(x_{0:t}|y_{1:t})}[w(x_{0:t})]} \quad (4.12)$$

con la ecuación $E_{q(x_{0:t}|y_{1:t})}$ que indica que los valores esperados son tomados de la distribución propuesta $q(x_{0:t}|y_{1:t})$. Luego,

$$E[g(x_{0:t})] = \frac{w(x_{0:t})g(x_{0:t})}{w(x_{0:t})} \quad (4.13)$$

Finalmente, el valor esperado de interés es obtenido tomando muestras de la *pdf* propuesta y la correspondiente representación muestral del valor esperado de la ecuación 4.13.

$$\begin{aligned} \overline{E[g(x_{0:t})]} &= \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w(x_{0:t,i}) g(x_{0:t,i})}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w(x_{0:t,i})} \\ &= \sum_{i=1}^N g(x_{0:t,i}) \tilde{w}(x_{0:t,i}) \end{aligned} \quad (4.14)$$

donde \tilde{w} son los pesos de importancia normalizados:

$$\tilde{w}(x_{0:t,i}) = \frac{w_t(x_{0:t,i})}{\sum_{i=1}^N w_t(x_{0:t,i})} \quad (4.15)$$

La convergencia asintótica se ha demostrado para $\overline{E[g(x_{0:t})]}$ considerando que las partículas extraídas de la distribución propuesta son independientes e idénticamente

distribuidas (i.i.d.) y que los valores esperados $E[g(x_{0:t})]$, $E[w(x_{0:t})]$, y $E[w(x_{0:t})g(x_{0:t})]$ existen en un espacio dimensional finito [Crisan (10), Doucet (16), Geweke (22)].

Se puede inferir de la ecuación 4.14 que la función de densidad de probabilidad posterior se la puede aproximar con la estimación empírica ponderada:

$$p_N(x_{0:t}|y_{1:t}) = \sum_{i=1}^N \tilde{w}(x_{0:t,i}) \delta(x_{0:t} - x_{0:t,i}) \quad (4.16)$$

4.4. Muestreo secuencial por importancia

La información al tiempo $t - 1$ es importante en el desarrollo de la formulación para los pesos de importancia. El estado x_{t-1} y la observación $y_{1:t-1}$ se usan en este procedimiento. El desarrollo de la versión del muestreo secuencial por importancia implica la modificación de los pesos de importancia no normalizados (Ecuación 4.9):

$$\begin{aligned} w(x_{0:t}) &= \frac{p(y_{1:t}|x_{0:t})p(x_{0:t})}{q(x_{0:t}|y_{1:t})} \\ &= \frac{p(y_t|x_{0:t}|y_{1:t-1})p(x_{0:t}|y_{1:t-1})}{q(x_{0:t}|y_{1:t})} \\ &= \frac{p(y_t|x_{0:t}|y_{1:t-1})p(x_t|x_{0:t-1}|y_{1:t-1})p(x_{0:t-1}|y_{1:t-1})}{q(x_{0:t}|y_{1:t})} \end{aligned} \quad (4.17)$$

De la ecuación 4.17, considerando que es posible factorizar la *pdf* de importancia:

$$q(x_{0:t}|y_{1:t}) = q(x_t|x_{0:t-1}, y_{1:t})q(x_{0:t-1}|y_{1:t-1}), \quad (4.18)$$

y considerando $\{x_{0:t}\}$ como un proceso de Markov, la expresión recursiva para los pesos de importancia está dado por:

$$\begin{aligned} w(x_t) &= \frac{p(y_t|x_t)p(x_t|x_{t-1})p(x_{0:t-1}|y_{1:t-1})}{q(x_t|x_{0:t-1}, y_{1:t})q(x_{0:t-1}|y_{1:t-1})} \\ &= w(x_{t-1}) \frac{p(y_t|x_t)p(x_t|x_{t-1})}{q(x_t|x_{0:t-1}, y_{1:t})} \end{aligned} \quad (4.19)$$

donde $w(x_{t-1})$ indica los pesos de importancia calculados al tiempo $t - 1$. La notación a usar en adelante es: $w_t = w(x_t)$ y $w_{t-1} = w(x_{t-1})$. La ecuación 4.19 provee un procedimiento para actualizar secuencialmente los pesos de importancia, dado una selección apropiada de la distribución propuesta. En este contexto la metodología para aproximar la *pdf* posterior es extraer partículas de la distribución propuesta, esto es $x_{t,i} \sim q(x_t|x_{0:t-1}, y_{1:t})$ para $i = 1, \dots, N$, y evaluar la probabilidad y las *pdfs* de

transición iterativamente. Por lo tanto, la ecuación 4.19 se usa para asignar un peso a cada partícula como se indica a continuación:

$$w_{t,i} = w_{t-1,i} \frac{p(y_t|x_{t,i})p(x_{t,i}|x_{t-1,i})}{q(x_{t,i}|x_{0:t-1,i}, y_{1:t})} \quad (4.20)$$

Este procedimiento es referido como muestreo secuencial de importancia. El cálculo de los pesos de importancia nos permite la aproximación de cualquier valor esperado de interés, que en este caso, es el valor medio condicional de x_t , esto es, $E[x_t|y_{1:t}]$, con la aproximación dada por:

$$\overline{E[x_t]} = \sum_{i=1}^N x_{t,i} \tilde{w}_{t,i} \quad (4.21)$$

con $\{x_{t,i}; i = 1, \dots, N\}$ el conjunto de partículas tomadas de la función de densidad de probabilidad propuesta. En resumen, en el paso de predicción un conjunto de partículas i.i.d. $x_{t,i}$ es tomado de la *pdf* propuesta $q(x_t|x_{t-1,i}, y_{1:t})$. En este punto, la implementación del filtro SIS presenta el reto de seleccionar una *pdf* propuesta apropiada.

En la etapa de análisis, se asigna un peso a cada partícula. El cálculo del peso es posible cuando tengamos la información de la observación y_t . Las *pdfs* involucradas en el cálculo de los pesos son el valor de la probabilidad de la observación, la *pdf* de transición, y la *pdf* propuesta. La probabilidad de la observación está dada por el modelo de la observación, mientras que, la *pdf* de la transición está dada por el modelo del proceso. Estos modelos se encuentran especificados en la sección 2.7.

Algoritmo 5 Filtro SIS General

Para $t = 1$ al número de pasos

1. Paso de predicción:

$$x_{t,i} \sim q(x_t|x_{t-1,i}, y_{1:t}), \quad i = 1, 2, \dots, N$$

2. Paso de análisis:

$$w_t(x_{t,i}) = w_{t-1}(x_{t-1,i}) \frac{p(y_t|x_{t,i})p(x_{t,i}|x_{t-1,i})}{q(x_{t,i}|x_{t-1,i}, y_{1:t})} \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$$\tilde{w}_t(x_{t,i}) = \frac{w_t(x_{t,i})}{\sum_{i=1}^N w_t(x_{t,i})}$$

$$\overline{E[x_t]} = \sum_{i=1}^N x_{t,i} \tilde{w}_t(x_{t,i})$$

La implementación práctica del algoritmo 5 tiene dos limitaciones. Una limitación es la complejidad en la forma de la *pdf* propuesta y la correspondiente dificultad en la selección de la misma. Otra limitación, desde el punto de vista de la implementación, es la evaluación de las partículas por la *pdf* de transición, para lo cual, se debería

conocer la función matemática de la distribución. Por ejemplo, para una función de densidad Gaussiana $\mathcal{N}(x; \mu, \sigma)$, la misma es definida por una función exponencial $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$. Una aproximación inicial para superar la primera limitación presente en la implementación del filtro SIS, es la de usar la *pdf* de transición como la *pdf* propuesta:

$$q(x_t|x_{t-1}, y_{1:t}) = p(x_t|x_{t-1}) \quad (4.22)$$

Una desventaja importante en esta asunción (Ecuación 4.22) es no incorporar información procedente de las observaciones $y_{1:t}$ en la *pdf* propuesta. Por otro lado, facilita la implementación del filtro SIS dada la expresión simplificada que se obtiene para el cálculo de los pesos de importancia. Adicionalmente, las partículas deben ser tomadas únicamente de la *pdf* de transición no evaluada. Para la generación de las partículas se usa el modelo estocástico no lineal. El filtro SIS con las correspondientes modificaciones que tienden a mejorar el filtro se presentan en el algoritmo 6.

Algoritmo 6 Filtro SIS Natural

Para $t = 1$ al número de pasos

1. Paso de predicción:

$$x_{t,i} \sim p(x_t|x_{t-1}), \quad i = 1, 2, \dots, N$$

2. Paso de análisis:

$$w_t(x_{t,i}) = w_{t-1}(x_{t-1,i})p(y_t|x_{t,i}) \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$$\tilde{w}_t(x_{t,i}) = \frac{w_t(x_{t,i})}{\sum_{i=1}^N w_t(x_{t,i})}$$

$$\overline{E[x_t]} = \sum_{i=1}^N x_{t,i} \tilde{w}_t(x_{t,i})$$

La aplicación del algoritmo 6 tiene una limitación en el rendimiento del filtro, debido a las probables diferencias entre la *pdf* posterior verdadera, la cual es desconocida, y la *pdf* propuesta para el muestreo. Como resultado de esto, se experimenta una degeneración de los pesos en el tiempo cuando se lleva a cabo la implementación del filtro natural SIS.

4.5. Degeneración de los pesos de las partículas

El filtro SIS del algoritmo 6 tiene una limitación relacionada a la evolución de la varianza de los pesos de importancia en el tiempo. Se produce un incremento de la varianza, lo cual degenera el valor de los valores de los pesos de importancia después

de algunas iteraciones del filtro. Un detallado reporte del fenómeno de generación se reporta en [Doucet (16)].

Para comprender el efecto no deseado del incremento de la varianza de los pesos, asumamos que se ha seleccionado la mejor *pdf* propuesta, esto es una *pdf* propuesta muy cercana, en términos probabilísticos, a la *pdf* posterior, modificando la ecuación 4.9 como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
 w_{0:t} &= \frac{p(y_{1:t}|x_{0:t})p(x_{0:t})}{q(x_{0:t}|y_{1:t})} \\
 &= \frac{p(x_{0:t}|y_{1:t})p(y_{1:t})}{q(x_{0:t}|y_{1:t})} \\
 &\propto \frac{p(x_{0:t}|y_{1:t})}{q(x_{0:t}|y_{1:t})} \tag{4.23}
 \end{aligned}$$

La última línea en la ecuación 4.23 indica que el peso de importancia no normalizado es proporcional a la razón de las *pdf*s, esta razón se denomina razón de importancia, que es útil en el análisis de la media y la varianza de los pesos de importancia. La media está dada por:

$$E_{q(\cdot|y_{1:t})} \left[\frac{p(x_{0:t}|y_{1:t})}{q(x_{0:t}|y_{1:t})} \right] = 1 \tag{4.24}$$

y la varianza:

$$E_{q(\cdot|y_{1:t})} \left[\left(\frac{p(x_{0:t}|y_{1:t})}{q(x_{0:t}|y_{1:t})} - 1 \right)^2 \right] = 0 \tag{4.25}$$

La ecuación 4.25 indica que para que la varianza sea cercana a cero, la *pdf* propuesta sea muy parecida a la *pdf* posterior (ecuación 4.26), lo cual en la práctica es difícil obtener, debido a que la *pdf* posterior es desconocida.

$$q(x_t|y_{1:t}) = p(x_t|y_{1:t}), \tag{4.26}$$

Cualquier no coincidencia en la razón de importancia conduce a una varianza diferente de cero, por lo cual es imposible de evitar el problema de degeneración de los pesos de importancia.

En la práctica la degeneración es observada monitoreando los pesos de importancia en cada paso del modelo. Lo que se observa es que, del conjunto completo de partículas, el peso de importancia normalizado de una sola partícula tiende al valor de 1, su máximo valor; mientras los pesos remanentes tienden al valor marginal cercano a cero. Por lo tanto, un número grande de partículas con pesos insignificantes llevan a una errónea aproximación muestral de la *pdf* posterior. Consecuentemente, un número grande de muestras deben ser removidas del espacio muestral ya que sus pesos son insignificantes. Hay algunas formas de mitigar el problema de degeneración. Incrementando en número de partículas N , es una forma de mitigación, pero es impráctico debido a que el tamaño del conjunto de partículas incrementa considerablemente el costo computacional. Dos formas adicionales, fáciles de implementar en la práctica y que consisten en una propia selección de la *pdf* propuesta y el remuestreo del conjunto de partículas ponderadas.

Estimación estática: análisis comparativo del desempeño de los métodos WLS, EKF y PF

La estimación de estados es un aspecto crucial en el análisis y manejo de los sistemas eléctricos de potencia. Permite determinar alertas debido a valores inaceptables de voltajes y frecuencia, cambio en la topología de la red, permite conocer la potencia disponible y el flujo de potencia entre las barras. En este capítulo se provee un estudio referencial del rendimiento de los filtros: mínimos cuadrados ponderados, el filtro extendido de Kalman y el filtro de partículas, por medio de la comparación entre estas técnicas. El rendimiento de los métodos se analiza comparando los resultados de la estimación considerando los índices de error. El método de los Mínimos Cuadrados Ponderados (WLS, por sus siglas en inglés) fue el primer método usado para resolver problemas de estimación de estados en los sistemas eléctricos de potencia. Fue introducido por el año 1970 por F. C. Schwepp.

5.1. Descripción de los estudios de simulación

5.1.1. El sistema eléctrico de potencia

El sistema eléctrico usado en este trabajo para el estudio de la estimación de los estados del sistema, con la finalidad de estandarizar los resultados, es el sistema de prueba de 14 barras, el cual se muestra en la figura 5.1, y de 30 barras de la IEEE [University (53)].

5. ESTIMACIÓN ESTÁTICA: ANÁLISIS COMPARATIVO DEL DESEMPEÑO DE LOS MÉTODOS WLS, EKF Y PF

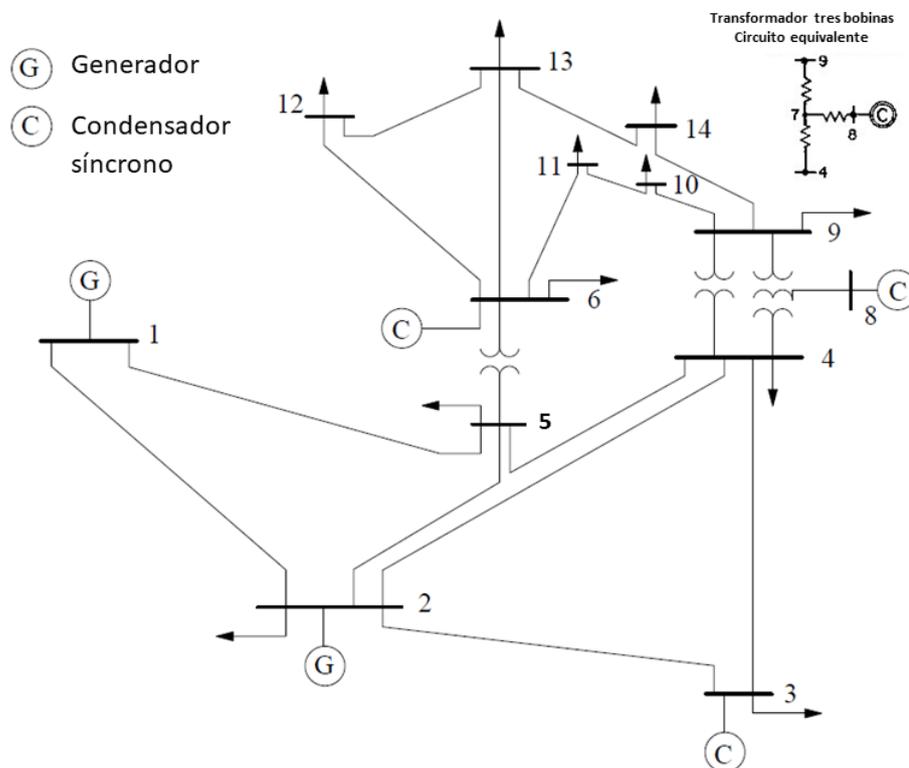


Figura 5.1: Sistema de prueba IEEE 14 barras

Para simular la dinámica del sistema se “corren” los cálculos de flujo de potencia bajo diferentes condiciones de cargas en cada paso de tiempo del proceso de simulación del sistema en estudio, produciendo una variación suave de la carga en el sistema. La dinámica del sistema de 14 barras se obtiene variando las cargas en ciertas barras predefinidas (4, 5, 7, 9-14) siguiendo una tendencia lineal del 1% en cada paso de tiempo. Adicionalmente, las mediciones de las magnitudes de voltaje, inyecciones de potencia en las barras y la transferencia de potencia se les añaden ruido aleatorio con distribución Gaussiana con una media igual a cero y un bajo nivel de variabilidad. Esto es, con una desviación estándar (σ) para las magnitudes de voltaje y potencia de acuerdo a la tabla 5.1 [Sharma et al. (46)] con la finalidad de considerar la incertidumbre de las mediciones.

Las variables de estado son las magnitudes de los voltajes (v) y de los ángulos (θ) de cada una de las barras del sistema. La barra 1, se considera la barra flotante (slack) con ángulo 0° . Las barras 2, 3, 6, 8 tienen voltajes regulados. El sistema de 14 barras tiene 68 mediciones, distribuidas de la siguiente forma: barras 1: 2 (P y Q), barras 2, 3, 6, 8: 8 (Q y \angle), barras 4, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 13 y 14: 18 (V y \angle) y el resto son *mediciones de potencias activas y reactivas en las líneas*: 40. Los estudios se realizan simulando el sistema en 30 pasos de tiempo.

Se realizó un estudio similar para el sistema de prueba de 30 barras de la ieee, en el

Tabla 5.1: Valores de la desviación estándar de las mediciones $\sqrt{R_k}$. [Sharma et al. (46)]

Power Injection in pu.	0.01
Power Flow in pu.	0.01
Voltage in pu.	0.006
Angle in rad

cual las barras 1, 2, 5, 8, 11 y 13 son las barras con voltajes regulados y la dinámica del sistema se obtiene variando el perfil de las cargas en las barras 3, 4, 6, 7, 9, 10, 12, 14-30 con una tendencia lineal del 1%.

Se considera los sistemas eléctricos IEEE de 14 barras y de 30 barras observables, en el proceso de la estimación estática, dada la redundancia existente en las mediciones.

5.1.2. Evaluación del rendimiento

Es importante determinar el rendimiento de los estimadores para seleccionar el de mejor calidad en una aplicación determinada. La calidad de una técnica de estimación puede ser medida en términos de métricas de rendimiento [Huang et al. (29)]. En la presente evaluación del rendimiento de los filtros utilizados, usaremos la *exactitud* que es una de las más importantes formas de evaluar un método de estimación, mide la cercanía entre el valor estimado y el valor verdadero. Otra cualidad importante para considerar en la evaluación del rendimiento de los estimadores es la *velocidad* (tiempo de ejecución del algoritmo) que debe por lo menos seguir a la velocidad de muestreo de los datos (mediciones).

La exactitud, se expresa como una medida del error y en este capítulo se calcula según [Alhalali and Elshatshat (3)] y [Valverde and Terzija (54)]:

1. Error de estimación $\varepsilon(k)$ para el paso k :

$$\varepsilon(k) = \frac{1}{2N_{barras} - 1} \sum_{n=2}^{2N_{barras}} |\hat{x}_n(k) - x_n^t(k)| \quad (5.1)$$

2. Error de estimación $\varepsilon(n)$ para la barra n :

- $\varepsilon_v(n)$ para la magnitud de voltaje:

$$\varepsilon_v(n) = \frac{1}{N_{pasos}} \sum_{k=1}^{N_{pasos}} |\hat{v}_k(n) - v_k^t(n)| \quad (5.2)$$

- $\varepsilon_\theta(n)$ para la magnitud del ángulo de voltaje:

$$\varepsilon_\theta(n) = \frac{1}{N_{pasos}} \sum_{k=1}^{N_{pasos}} |\hat{\theta}_k(n) - \theta_k^t(n)| \quad (5.3)$$

5. ESTIMACIÓN ESTÁTICA: ANÁLISIS COMPARATIVO DEL DESEMPEÑO DE LOS MÉTODOS WLS, EKF Y PF

donde:

- x es el vector de estado $[\theta_2 \dots \theta_n, v_1 \dots v_n]$.
- $\varepsilon(k)$ es la media del error para el paso k .
- $\hat{x}_n(k)$ es el vector de estado estimado (filtrado) en el paso k , y barra n .
- N_{barras} es el número de barras.
- $\varepsilon(n)$ es la media del error para la barra n .
- $\varepsilon_v(n)$ es la estimación del error calculado para la magnitud de voltaje en la barra n .
- $\hat{v}_k(n)$ es la magnitud del voltaje estimado (filtrado) en la barra n , y paso k .
- $v_k^t(n)$ es la magnitud del voltaje verdadero en la barra n , y paso k .
- $\varepsilon_\theta(n)$ es el error de la estimación calculado para la magnitud del ángulo en la barra n .
- $\hat{\theta}_k(n)$ es la magnitud del ángulo estimado (filtrado) en la barra n , y paso k .
- $\theta_k^t(n)$ es el valor verdadero de la magnitud del ángulo de la barra n , y paso k .
- N_{pasos} es el número de pasos (pasos de muestreo).

5.1.3. Implementación del Mínimo Cuadrado Ponderado - WLS

La estimación de estados usando la aproximación WLS involucra la solución iterativa de la siguiente ecuación normalizada:

$$G(x_i)\Delta x_{i+1} = H(x_i)^T R^{-1}[z - h(x_i)] \quad (5.4)$$

Considerando esto y la teoría vista en la sección 2.2, se implementa la técnica WLS, según algoritmo 7, en el sistema de prueba de la IEEE de 14 barras para la simulación respectiva con las condiciones previamente indicadas. Considerando un valor inicial para el vector x_0 , donde se asumen todos los voltajes de las barras en 1 por unidad (p.u.) y en fase entre cada uno de ellos.

5.1.4. Implementación del algoritmo del filtro Extendido de Kalman - EKF

De acuerdo a las ecuaciones del proceso y las observaciones dadas en la ecuación 3.5.1 tenemos que:

$$x_k = f_{k-1}(x_{k-1}) + w_k \quad (5.5)$$

$$y_k = h_k(x_k) + v_k \quad (5.6)$$

Algoritmo 7 Mínimos Cuadrados Ponderados - WLS

1. Inicializar el vector de estado x , (x_0), donde se asumen típicamente todos los voltajes de las barras en 1 por unidad (p.u) y en fase entre cada uno de ellos.
 2. Arranca iteraciones, fija el índice de iteración $i = 0$ y el paso de tiempo índice $k = 1$.
 3. Resolver la matriz Jacobiana, $H(x_i)$.
 4. Calcular la matriz de Ganancia, $G(x_i)$.
 5. Calcular el lado derecho de la ecuación:
$$g(x_i) = H(x_i)^T R^{-1} [z - h(x_i)]$$
 6. Descomponer $G(x_i)$ y resolver para Δx_i .
$$H(x_i)^T R^{-1} H \Delta x_i = H(x_i)^T R^{-1} [z - h(x_i)]$$
 7. Probar convergencia, $\max |\Delta x_i| \leq \varepsilon$.
 8. Si no, actualizar $x_{i+1} = x_i + \Delta x_i$, $i = i + 1$, y vaya al paso 4
 9. Incrementar la carga y ejecutar el flujo de potencia
 10. Si k es menor o igual que 30, vaya al paso 2 y haga $k = k + 1$.
De lo contrario, detener.
-

5. ESTIMACIÓN ESTÁTICA: ANÁLISIS COMPARATIVO DEL DESEMPEÑO DE LOS MÉTODOS WLS, EKF Y PF

donde, las variables aleatorias w_k y v_k representan los ruidos del proceso y las mediciones, los cuales se asumen son ruidos blancos y con una distribución de probabilidad normal: $p(w) \sim N(0, Q_{k-1}), p(v) \sim N(0, R_k)$ respectivamente. La covarianza del error debido al ruido Gaussiano del proceso Q_{k-1} y la covarianza del error debido al ruido Gaussiano de las mediciones R_k son matrices diagonales que pueden cambiar con cada paso k o mediciones [Zanni et al. (57)]. En este estudio, el valor de Q_{k-1} se asume que son constantes y fijados en 10^{-6} de acuerdo a [Valverde and Terzija (54)]. Los valores para la desviación estándar de la varianza del error en las mediciones $\sqrt{R_k}$, se dan en la tabla 5.1 de acuerdo a [Sharma et al. (46)].

Para la implementación del método EKF, es necesario linealizar la ecuación 5.5, que asumiendo un comportamiento casi estable del estado se la puede representar por:

$$x_k = F_{k-1}x_{k-1} + g_{k-1} + q_{k-1}, \quad (5.7)$$

donde la matriz F_{k-1} representa la velocidad de transición entre los estados y la matriz g_{k-1} está relacionada con el comportamiento de la tendencia de los estados.

La estimación dinámica de los estados depende fuertemente de la técnica de predicción usada en la estimación de los parámetros de F_{k-1} , g_{k-1} y q_{k-1} . La técnica usada para estos cálculos es la linealización exponencial suave de Holtz (técnica de linealización paramétrica en línea). Este método de linealización es ampliamente usado en la predicción de los estados de estos tipos de sistemas, [Valverde and Terzija (54)], [Nguyen et al. (37)]. Provee una buena estimación, aun considerando que las variables de estado se asuman independientes.

Los valores de estos parámetros se los obtiene con las siguientes ecuaciones:

$$F_{k-1} = \alpha_{k-1}(1 + \beta_{k-1})I, \quad (5.8)$$

$$g_{k-1} = (1 + \beta_{k-1})(1 - \alpha_{k-1})\tilde{x}_{k-1} - \beta_{k-1}a_{k-2} + (1 - \beta_{k-1})b_{k-2} \quad (5.9)$$

donde: I es la matriz de identidad, los parámetros α_{k-1} y β_{k-1} tienen valores comprendidos entre 0 y 1. En este trabajo, estos valores han sido fijados como constantes en todo el proceso de simulación a 0.5 y 0.8 respectivamente, según fue propuesto en [Valverde and Terzija (54)], y los vectores a y b se obtienen del conocimiento previo (apriori) del sistema:

$$a_{k-1} = \alpha_{k-1}x_{k-1}^t + (1 - \alpha_{k-1})\tilde{x}_{k-1}, \quad (5.10)$$

$$b_{k-1} = \beta_{k-1}(a_{k-1} - a_{k-2}) + (1 - \beta_{k-1})b_{k-2} \quad (5.11)$$

donde, \tilde{x}_{k-1} es el vector de estado predicho, y x_{k-1}^t es el vector de estado verdadero. El diagrama de flujo del algoritmo utilizado en el desarrollo del método EKF se ilustra en la figura 5.2

5.1.5. Implementación del Filtro de Partículas

El Filtro de Partículas desarrollado está basado en el Muestreo de Importancia Secuencial (SIS) y un paso adicional de Remuestreo (Resampling) Sistemático (SysR)

para tratar el problema de la degeneración de las partículas con una mínima variación en el remuestreo usando el método aleatorio de Monte Carlo.

La covarianza del error debido al ruido de las mediciones R_k para la inyección de potencias, flujo de potencia, las magnitudes de voltajes y ángulos se han establecido de acuerdo a la tabla 5.1 [Sharma et al. (46)].

El número de partículas N usado en el desarrollo del Método de Monte Carlo (MMC) en el proceso de simulación es de 100. El número de k pasos utilizados en la simulación es de 30.

El Diagrama de Flujo usado en el desarrollo del algoritmo del Filtro de Partículas se ilustra en la fig 5.3

5.2. Análisis de resultados y conclusiones

Los valores promedios de los índices de rendimiento (errores (ε)) obtenidos en los procesos de simulación de las diferentes técnicas de estimación consideradas en el sistema de prueba de la IEEE 14 y 30 barras de acuerdo a las fórmulas establecidas en la sección 5.1.2 se muestran en las tablas 5.3 y 5.4.

Los datos de los tiempos de ejecución de los estimadores considerados se muestran en la tabla 5.2, además se los presenta en la figura 5.4. Los tiempos mostrados corresponden a la carga computacional correspondiente a la ejecución de las técnicas de estimación WLS, EKF y PF; mide el tiempo computacional de la ejecución de los correspondientes algoritmos desarrollados. Para comparar el tiempo computacional de los estimadores implementados en Matlab versión 2018a se utiliza una computadora con un procesador de 2.80 GHz, 16 GB de memoria y un sistema operativo de 64 bit, Windows 10. El tiempo se mide desde el inicio del primer paso de predicción hasta la finalización del último paso de corrección para los estimadores EKF y PF. En el caso del WLS desde el inicio de su algoritmo hasta el final de este.

Tabla 5.2: Tiempos de ejecución: WLS, Filtro EKF y Filtro de Partículas (PF). Estimación estática. Ieee 14 barras.

Tiempo	WLS	EKF	PF
<i>segundos</i>	0.7942	5.8649	124.66

El rendimiento del WLS, EKF, y PF se evalúan comparándolos entre ellos, tomando en consideración los índices de rendimiento $\varepsilon_v(n)$, $\varepsilon_\theta(n)$, $\varepsilon(k)$ y los gráficos de las magnitudes de voltajes y ángulos tomando como referencia los valores de las variables de estados verdaderos del sistema en consideración, sistemas de prueba de la IEEE

5. ESTIMACIÓN ESTÁTICA: ANÁLISIS COMPARATIVO DEL DESEMPEÑO DE LOS MÉTODOS WLS, EKF Y PF

de 14 y 30 barras, durante un período de simulación de 30 pasos. Para el sistema de prueba IEEE de 30 barras los estimadores de estados considerados son el PF y el EKF. La figura 5.5 muestra los índices de rendimiento de las magnitudes de voltaje $\varepsilon_v(n)$ y de las magnitudes de los ángulos $\varepsilon_\theta(n)$ para las n barras del sistema. En todos los casos el filtro de partícula PF presenta un rendimiento global superior a los demás estimadores en estudio WLS y EKF. Los errores de estimación para cada paso se muestran en la figura 5.6 y los valores de las magnitudes de los voltajes y ángulos en la barra 9 en cada paso para cada estimador se presentan en las figuras 5.7 y 5.8, donde se puede observar que el estimador PF reacciona más rápidamente, desde el primer paso de la simulación, que los estimadores WLS y EKF y sigue inmediatamente al valor verdadero dando muestras de una buena velocidad de respuesta.

Tabla 5.3: Índices de rendimientos promedios. Ieee 14 barras ($\cdot 10^{-3}$).

ESTIMADORES	$\varepsilon_v(n)$	$\varepsilon_\theta(n)$	$\varepsilon(k)$
WLS	5.3082	3.3886	4.5095
EKF	3.1082	0.4706	1.8556
PF	0.9088	0.0338	0.4887

Tabla 5.4: Índices de rendimientos promedios. Ieee 14 y 30 barras. EKF y PF ($\cdot 10^{-3}$).

Ieee	EKF	PF	EKF	PF	EKF	PF
test case	$\varepsilon_v(n)$	$\varepsilon_v(n)$	$\varepsilon_\theta(n)$	$\varepsilon_\theta(n)$	$\varepsilon(k)$	$\varepsilon(k)$
14	3.03034	0.33914	0.45452	0.03730	1.80697	0.19520
30	2.18795	0.20176	0.46647	0.02550	1.34970	0.11403

Se observa, además, que, a cualquier desplazamiento del valor estimado de la magnitud de voltaje con respecto al valor verdadero, para cualquiera de los métodos, resulta en un pico en el índice de rendimiento $\varepsilon(k)$. Por ejemplo, en la figura 5.7 en el paso 19 del filtro EKF presenta un desplazamiento respecto de su valor verdadero. En el mismo paso 19 en la figura 5.6, se observa un pico en la señal $\varepsilon(k)$. Presenta el mismo comportamiento en el paso 3 del PF, así como en el paso 14 del WLS. Los estimadores muestran una tendencia general de sintonizar con el valor verdadero. Aplicando un análisis similar para los estimadores EKF y PF usados en el sistema de 30 barras figuras 5.9, 5.10 y 5.11 se puede concluir que el Filtro de Partículas presenta una mejor exactitud en los valores estimados.

Con respecto a la carga de tiempo computacional en la ejecución de los algoritmos y acuerdo a los resultados obtenidos según la tabla 5.2 y visualizados en la figura 5.4 se

Tabla 5.5: Error de magnitudes de voltajes y ángulos en barra N . Ieee 14 barras ($*10^{-3}$).

Barra	EKF	PF	EKF	PF
N	$\varepsilon_v(n)$	$\varepsilon_v(n)$	$\varepsilon_\theta(n)$	$\varepsilon_\theta(n)$
1	0.07064	0.10532	—	—
2	2.30614	0.36903	0.53414	0.05991
3	0.70920	0.09693	0.68404	0.06735
4	1.96822	0.28629	0.22141	0.00450
5	1.89637	0.27955	0.22306	0.01022
6	3.99940	0.37438	0.40602	0.04643
7	3.62343	0.48452	0.40888	0.02142
8	4.45831	0.35994	0.40360	0.02142
9	3.74959	0.40222	0.65168	0.03849
10	3.77679	0.41531	0.63580	0.04267
11	3.88650	0.39977	0.48894	0.04516
12	4.03918	0.37924	0.49642	0.05459
13	4.02787	0.38485	0.48794	0.05339
14	3.91311	0.41069	0.72140	0.05675
AVG	3.03034	0.33914	0.45452	0.03730

observa un considerable mayor consumo de tiempo en la ejecución del algoritmo para el PF, lo cual va a ser relevante considerar al momento de tomar una decisión sobre cuál de los algoritmos comparados usar en una aplicación real.

Se incorpora un escenario adicional para el sistema de 14 barras y 30 barras en el cual se consideran mediciones con errores grandes 5% para las potencias y 1% para las magnitudes de voltaje. Obteniéndose los siguientes resultados para los índices de rendimientos, según las ecuaciones: 5.1, 5.2, 5.3. Los resultados obtenidos se los muestra en las tablas: 5.7, 5.8 y en las figuras 5.12, 5.13, 5.14 y 5.15. El PF sigue siendo el de mejor rendimiento, pero con tiempos computacionales altos.

5. ESTIMACIÓN ESTÁTICA: ANÁLISIS COMPARATIVO DEL DESEMPEÑO DE LOS MÉTODOS WLS, EKF Y PF

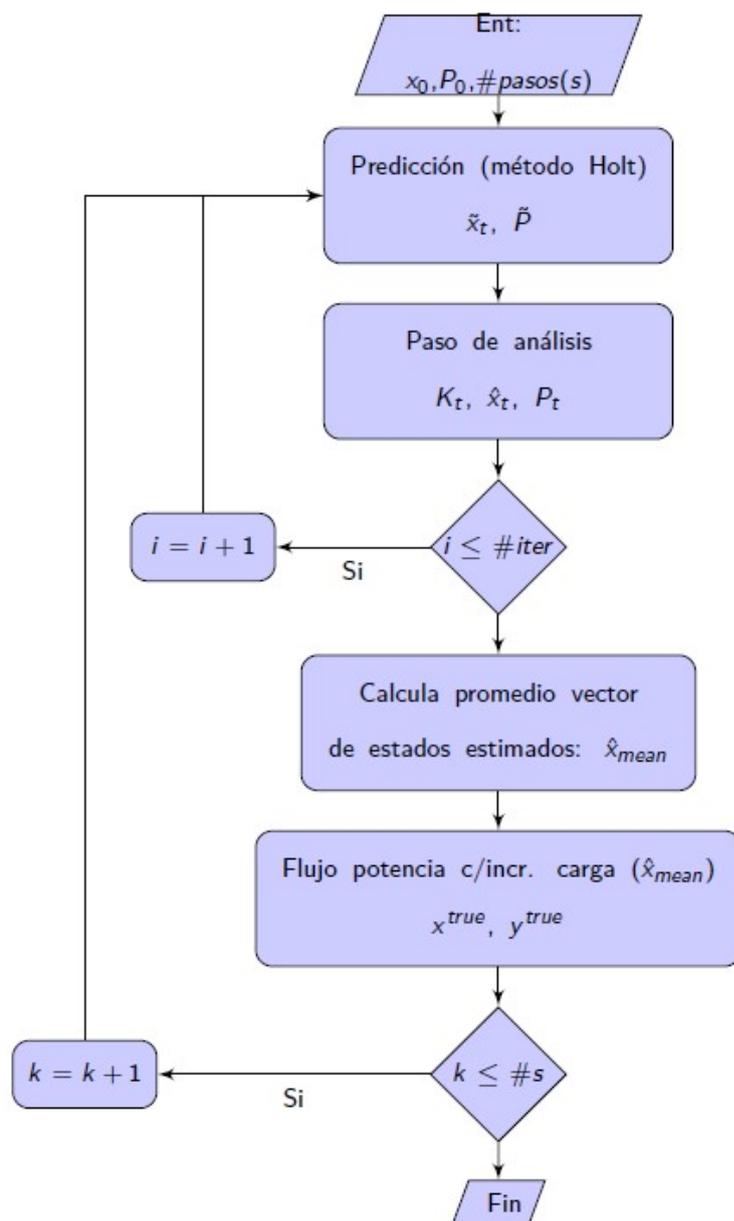


Figura 5.2: Diagrama de flujo del algoritmo usado en la implementación del EKF

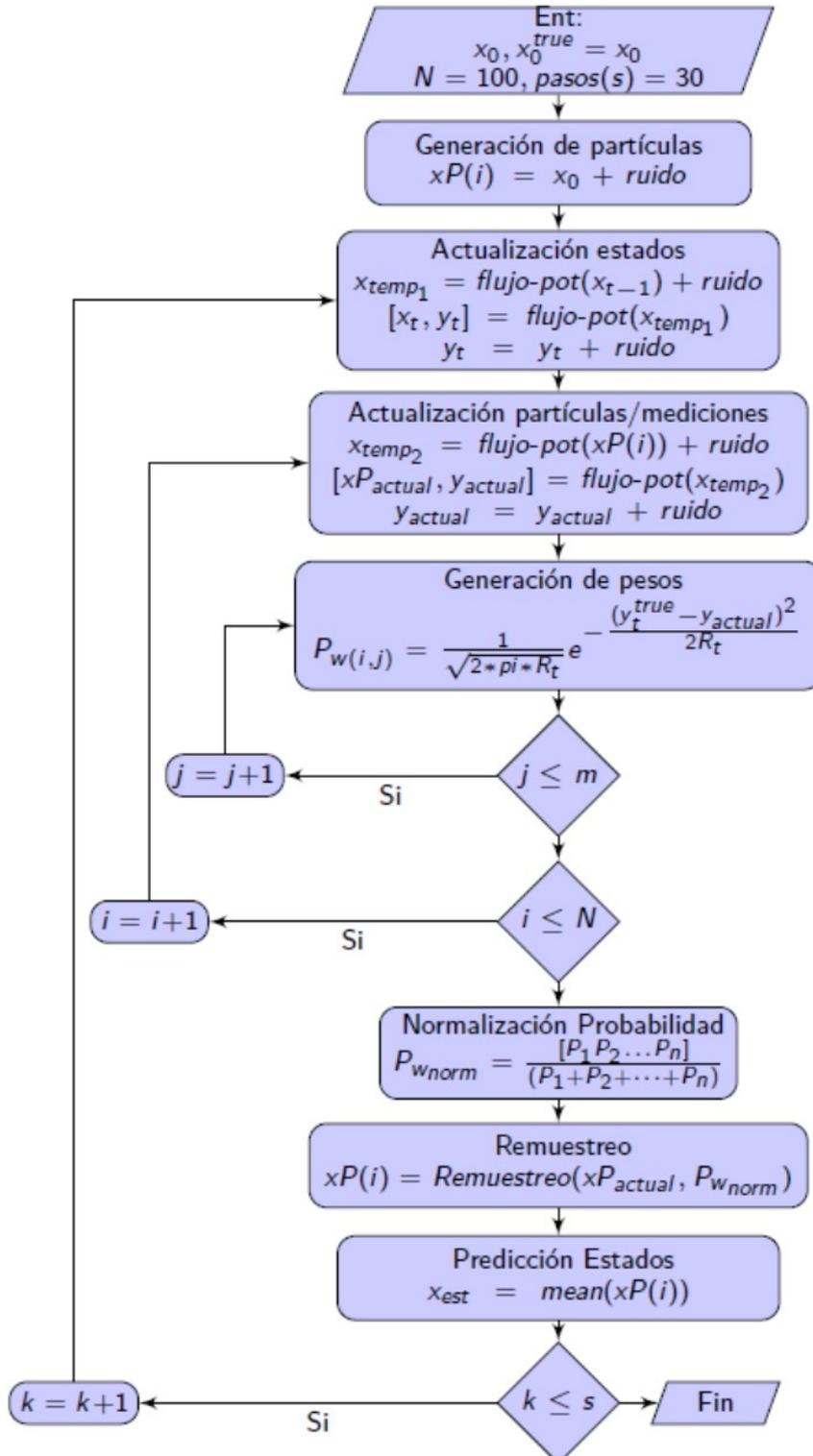


Figura 5.3: Diagrama de Flujo del algoritmo usado en la implementación del PF

5. ESTIMACIÓN ESTÁTICA: ANÁLISIS COMPARATIVO DEL DESEMPEÑO DE LOS MÉTODOS WLS, EKF Y PF

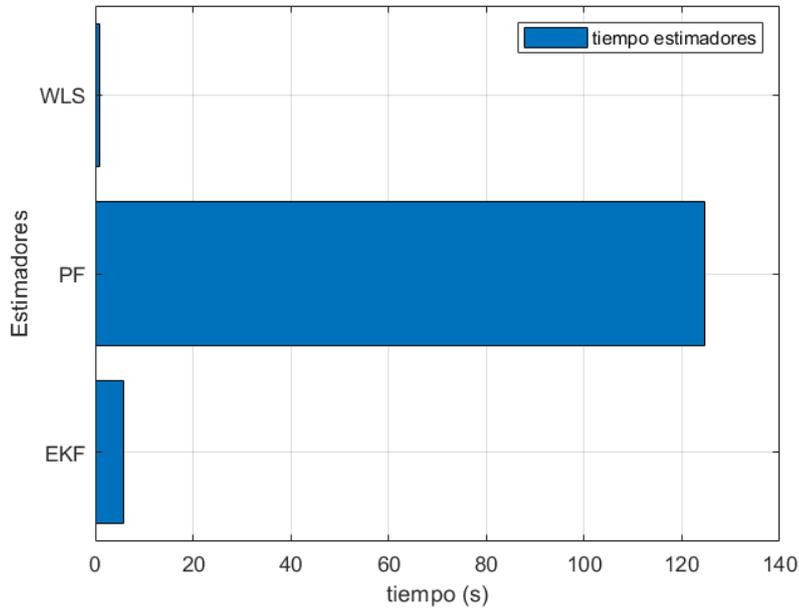


Figura 5.4: Tiempo de ejecución de los estimadores WLS, EKF, PF

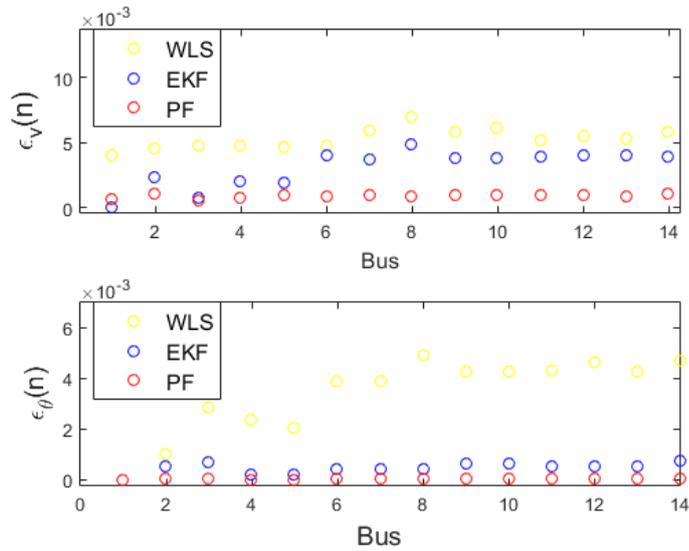


Figura 5.5: Error de magnitud de voltaje y ángulo en barra (bus). Sistema de prueba ieee 14 barras.

Tabla 5.6: Error de magnitudes de voltajes y ángulos en barra N . Ieee 30 barras ($*10^{-3}$).

Barra	EKF	PF	EKF	PF
N	$\varepsilon_v(n)$	$\varepsilon_v(n)$	$\varepsilon_\theta(n)$	$\varepsilon_\theta(n)$
1	0.16335	0.11194	—	—
2	1.03012	0.13037	0.37602	0.01114
3	1.17884	0.12882	0.40193	0.00763
4	1.43330	0.12001	0.37982	0.00894
5	1.31670	0.07552	0.51154	0.01349
6	1.63579	0.14376	0.35859	0.00531
7	1.48783	0.10574	0.33712	0.00785
8	1.93061	0.07472	0.48693	0.01448
9	2.21905	0.23174	0.42784	0.01632
10	2.62787	0.23280	0.55035	0.02776
11	2.41184	0.37456	0.42613	0.01632
12	2.53278	0.23600	0.33114	0.01512
13	3.06382	0.35146	0.33132	0.01512
14	2.58198	0.25746	0.36753	0.02246
15	2.62259	0.26363	0.42419	0.02514
16	2.60319	0.26024	0.45643	0.02378
17	2.62461	0.21066	0.51898	0.02776
18	2.65915	0.24751	0.52294	0.03185
19	2.69154	0.24192	0.58205	0.03422
20	2.68115	0.26002	0.57713	0.03306
21	2.67999	0.25439	0.57759	0.03073
22	2.66517	0.25129	0.59110	0.03051
23	2.66821	0.22948	0.51248	0.02954
24	2.71006	0.19480	0.60680	0.03248
25	2.41069	0.17805	0.56890	0.03453
26	2.50136	0.21455	0.61743	0.03691
27	2.19590	0.18490	0.51099	0.03394
28	1.75095	0.11408	0.37512	0.00667
29	2.26916	0.19210	0.59487	0.03904
30	2.29088	0.18016	0.67090	0.04295
AVG	2.18795	0.20176	0.46647	0.02550

5. ESTIMACIÓN ESTÁTICA: ANÁLISIS COMPARATIVO DEL DESEMPEÑO DE LOS MÉTODOS WLS, EKF Y PF

Tabla 5.7: Índices de rendimientos promedios. Ieee 14 y 30 barras. WLS, EKF y PF. Error 5% Potencias y 1% magnitudes de voltaje ($\times 10^{-3}$).

Ieee	WLS	EKF	PF	WLS	EKF	PF	WLS	EKF	PF
test case	$\varepsilon_v(n)$	$\varepsilon_v(n)$	$\varepsilon_v(n)$	$\varepsilon_\theta(n)$	$\varepsilon_\theta(n)$	$\varepsilon_\theta(n)$	$\varepsilon(k)$	$\varepsilon(k)$	$\varepsilon(k)$
14	4.884	3.088	0.487	3.486	0.475	0.037	4.340	1.847	0.487
30	11.47	2.296	0.737	6.47	0.579	0.026	9.122	1.462	0.388

Tabla 5.8: Tiempo de ejecución en segundos: WLS, EKF y PF. Ieee 14 y 30 barras. Error 5% Potencias y 1% magnitudes de voltaje.

Ieee	WLS	EKF	PF
test case	<i>seg.</i>	<i>seg.</i>	<i>seg.</i>
14	0.926	6.005	108.42
30	1.242	8.5533	201.857

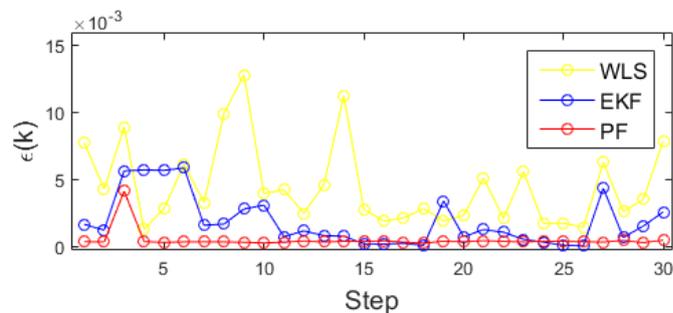


Figura 5.6: Error de estimación paso (step) k . Sistema de prueba ieee 14 barras.

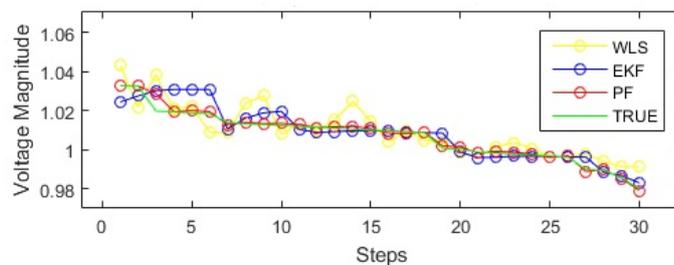


Figura 5.7: Magnitud de voltaje en barra 9. Sistema de prueba ieee 14 barras.

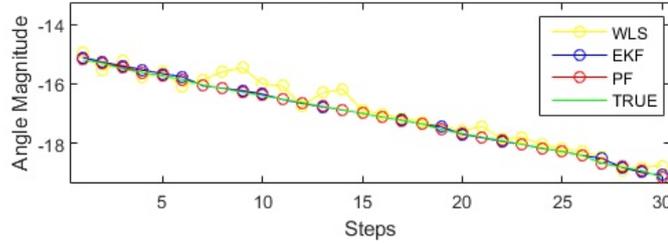


Figura 5.8: Ángulo (angle) de fase voltaje barra 9. Sistema de prueba ieee 14 barras.

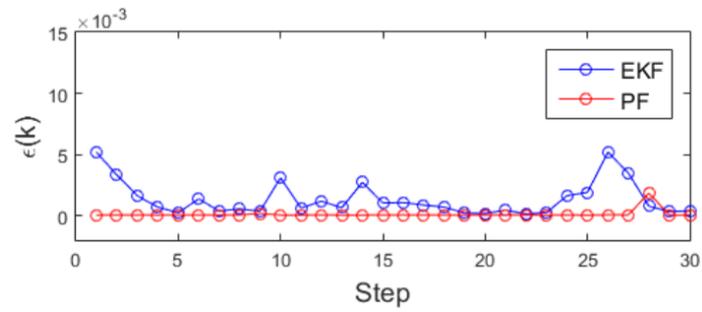


Figura 5.9: Error de estimación paso (step) k . Sistema de prueba ieee 30 barras.

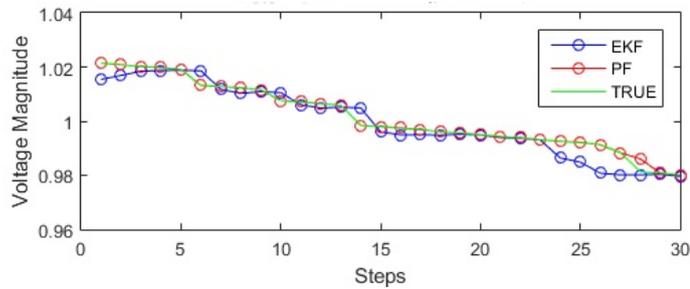


Figura 5.10: Magnitud de voltaje en barra 14. Sistema de prueba ieee 30 barras.

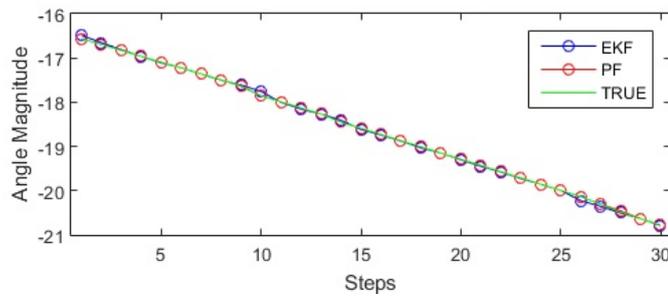


Figura 5.11: Ángulo (angle) de fase voltaje barra 14. Sistema de prueba ieee 30 barras.

5. ESTIMACIÓN ESTÁTICA: ANÁLISIS COMPARATIVO DEL DESEMPEÑO DE LOS MÉTODOS WLS, EKF Y PF

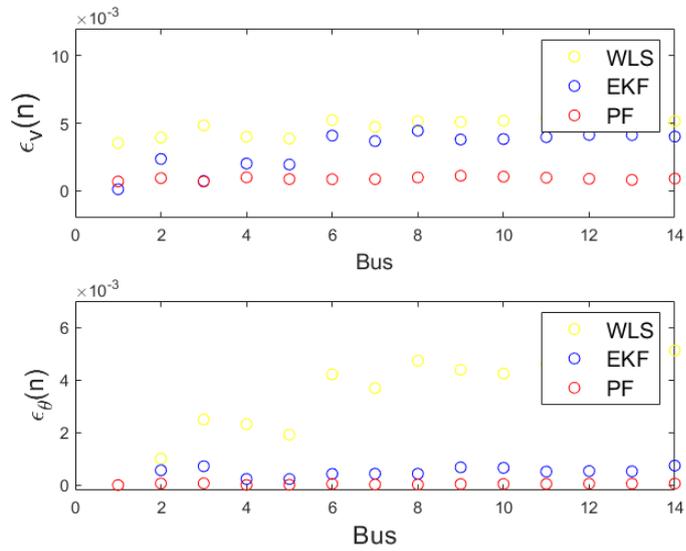


Figura 5.12: Error de magnitud de voltaje y ángulo en barra (bus). Error 5% Potencias y 1% magnitudes de voltaje. Sistema de prueba ieee 14 barras.

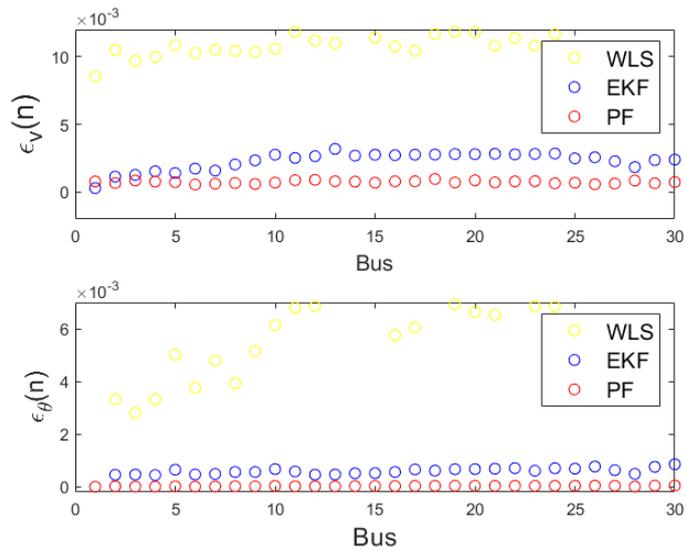


Figura 5.13: Error de magnitud de voltaje y ángulo en barra (bus). Error 5% Potencias y 1% magnitudes de voltaje. Sistema de prueba ieee 30 barras.

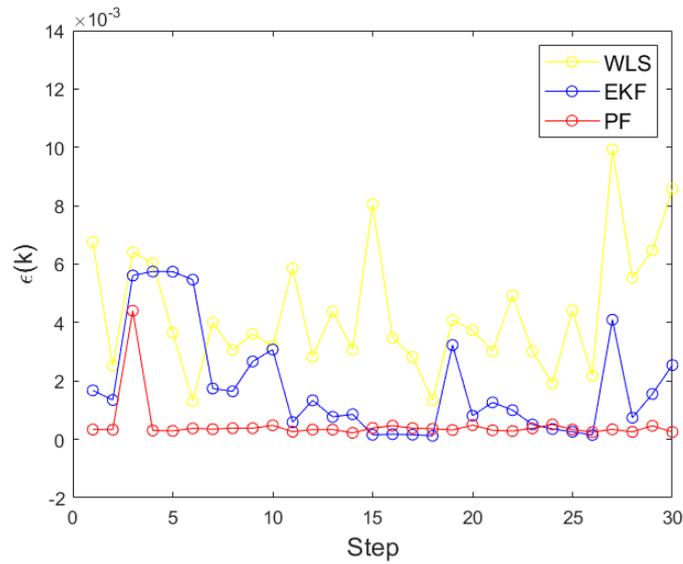


Figura 5.14: Error de estimación paso (step) k . Error 5% Potencias y 1% magnitudes de voltaje. Sistema de prueba ieeb 14 barras.

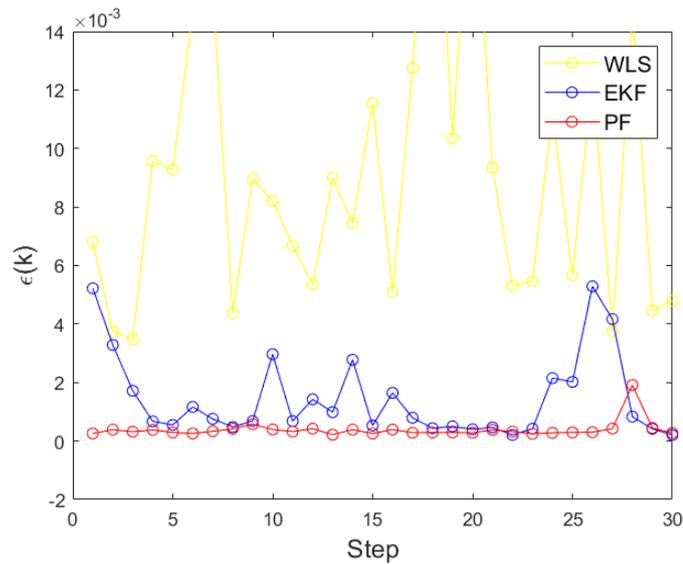


Figura 5.15: Error de estimación paso (step) k . Error 5% Potencias y 1% magnitudes de voltaje. Sistema de prueba ieeb 30 barras.

Estimación dinámica: filtro de Kalman de ensamble y filtro de partículas en la estimación de estados en sistemas eléctricos de potencia multimáquinas

6.1. Introducción

En este capítulo, se proporciona un estudio referencial del Filtro de Partículas de Muestreo de Importancia Secuencial con Remuestreo Sistemático y el Filtro de Ensamble de Kalman para estimar los estados dinámicos de varias máquinas sincrónicas conectadas a un caso de prueba de 14-barras modificado, cuando se aplica un fallo de tres fases equilibrado en una barra cerca de uno de los generadores del sistema. El Filtro de Partículas de Muestreo de Importancia Secuencial con Remuestreo Sistemático y el Filtro de Ensamble de Kalman están respaldados por simulaciones de Monte Carlo con consideraciones prácticas de ruido e incertidumbre en el modelo. Las simulaciones se llevaron a cabo en MATLAB. La evaluación del modelo de sistema se realiza con la herramienta de Matlab PST (Power System Toolbox), mientras que en la evaluación del Filtro de Partículas y el Filtro de Ensamble de Kalman con código insertado en el PST.

Por definición, la estimación de estado dinámico (DSE) aplicado a las máquinas sincrónicas es el seguimiento dinámico y la estimación de los estados de un generador o condensador síncrono y las unidades eléctricas relacionadas dado el modelo matemático de la dinámica del sistema soportado por las mediciones de las variables eléctricas o físicas. El estudio de la estimación de estados dinámicos es muy importante, principalmente

6. ESTIMACIÓN DINÁMICA: FILTRO DE KALMAN DE ENSAMBLE Y FILTRO DE PARTÍCULAS EN LA ESTIMACIÓN DE ESTADOS EN SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA MULTIMÁQUINAS

donde se requieren sistemas de control que requieren respuestas rápidas. Típicamente, DSE es asistida por unidades de medición de fasores (PMUs) que proporcionan datos importantes para una estimación precisa a una velocidad de muestreo alta (10 a 120 muestras por segundo) [Zhou et al. (62)]. Además, la DSE permite sincronizarse con el reloj del sistema de posicionamiento global (GPS), y puede capturar la respuesta dinámica electromecánica de los equipos del sistema.

Se considerará en el presente estudio que los sistemas sobre los cuales se aplican los estimadores son observables dada la redundancia de las mediciones y el objetivo del trabajo propuesto. Al respecto, sobre la Observabilidad no tratada en la implementación del presente trabajo existen investigaciones muy importantes, las cuales resumo unas pocas a continuación:

En [Abur (1)], la observabilidad en los sistemas estáticos es determinada chequeando el rango de la columna de la Jacobiana H de las mediciones, y de ser inobservable una pseudomedición se puede añadir con la finalidad de que el sistema sea observable. En el caso de la estimación dinámica es una función de la estructura de la medición y las ecuaciones de estado. En [Rouhani and Abur (38)], realizan un análisis de observabilidad para diferentes conjuntos de mediciones y evalúan el nivel de observabilidad bajo diferentes condiciones transientes de sistemas dinámicos no lineales usando las derivadas de Lie. En [Rouhani and Abur (39)], presentan un análisis de observabilidad de un modelo no lineal variante en el tiempo de un generador sincrónico asociado a su sistema de control. Un modelo de dos ejes de un generador sincrónico asociado con un excitador IEEE-tipo 1 es usado para validar los resultados de observabilidad. El estudio es desarrollado usando el valor singular de la matriz de observabilidad basada en la derivada de Lie. El estudio reporta que la estimación de estados dinámica converge al valor verdadero más rápido y suave si mediciones, basadas en el estudio, que provean un alto nivel de observabilidad son usadas. El uso del más pequeño valor singular de la matriz obtenido a través de la derivada de Lie para cuantificar el grado de observabilidad de un sistema dinámico no ha sido formalmente probado, por lo que se considera como un trabajo futuro para desarrollar [Zhao et al. (61)].

En el presente trabajo no se simula la implementación del PMU, se centra en la simulación del funcionamiento de los filtros en condiciones de operación ante un disturbio, falla trifásica equilibrada, que se presenta en la red considerada, además de la robustez de los filtros relacionada con los ruidos de las mediciones y del proceso usando técnicas Bayesianas y métodos de Monte Carlo para obtener el comportamiento promedio de los algoritmos en diferentes condiciones del tipo de ruido. Los métodos más aplicados para estudiar la estimación de estados en Sistemas Eléctricos de Potencia (EPS) son: el Filtro de Kalman (KF) [Kalman (31)] utilizado para el análisis de sistemas lineales dinámicos con ruido distribuido normalmente, el Filtro Extendido de Kalman (EKF) que se aplica para sistemas no lineales y su rendimiento se basa en la precisión de la linealización en su desarrollo, y el Filtro Unscented de Kalman (UKF) [Valverde and Terzija (55)] que mejora la precisión del EKF [Cui and Kavasseri (11)]. El Filtro de Ensemble de Kalman (EnKF) es un filtro recursivo adecuado para resolver problemas con un gran número de variables y originalmente fue ampliamente utilizado en la pre-

dicción del tiempo donde los modelos son de alto orden y extremadamente no lineales [Evensen (21)].

El Filtro de Partículas (PF) [Cui and Kavasseri (12)], [Emami et al. (18)] y otros métodos estocásticos son una alternativa a los filtros Kalman porque son estimadores basados en probabilidades. Los avances tecnológicos existentes en el desarrollo de las computadoras aceleran el rendimiento y las mediciones altamente confiables de las PMUs ayudan a mejorar el rendimiento del PF.

El modelo dinámico de un sistema se puede representar mediante la expresión:

$$x_k = f_k(x_{k-1}, u_{k-1}, n_{k-1}) \quad (6.1)$$

donde el estado del sistema x_k en el paso k es una función, representada por f_k , del estado anterior x_{k-1} , la entrada del sistema u_{k-1} y el ruido del proceso del sistema n_{k-1} que es independiente y distribuido de forma idéntica (*i.i.d.*). La función f_k puede ser no lineal. El filtro tiene el objetivo de estimar recursivamente el estado x_k teniendo en cuenta la representación del sistema basada en la función de medición, dada por

$$y_k = h_k(x_k, u_k, m_k) \quad (6.2)$$

donde la medición y_k es una función, (posiblemente no lineal, representada por h) del estado x_k , entrada u_k y m_k que es un ruido *i.i.d.* del proceso de medición. Según la teoría Bayesiana, sección 2.8, el estado x_k puede estimarse recursivamente si las mediciones hasta el paso k están disponibles.

6.2. Modelos Dinámicos

La máquina síncrona se puede representar con el voltaje detrás del modelo de reactancia subtransiente [Sauer (41)].

$$\dot{\delta} = \omega - \omega_s \quad (6.3)$$

$$\dot{\omega} = \frac{\pi f}{H} (-D(\omega - \omega_s) + T_m - P_e) \quad (6.4)$$

$$\dot{E}'_q = \frac{1}{T'_{qo}} (E_{fd} - E'_q + (X_d - X'_d)I_d) \quad (6.5)$$

$$\dot{E}'_d = \frac{1}{T'_{qo}} (-E'_d - (X_q - X'_q)I_q) \quad (6.6)$$

$$\dot{E}''_q = \frac{1}{T''_{do}} (E'_q - E''_q + (X'_d - X''_d)I_d) \quad (6.7)$$

$$\dot{E}''_d = \frac{1}{T''_{qo}} (E'_d - E''_d - (X'_q - X''_q)I_q) \quad (6.8)$$

donde:

6. ESTIMACIÓN DINÁMICA: FILTRO DE KALMAN DE ENSAMBLE Y FILTRO DE PARTÍCULAS EN LA ESTIMACIÓN DE ESTADOS EN SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA MULTIMÁQUINAS

H	es la constante de inercia.
D	es el factor de amortiguación.
T'_{do}	es la constante de tiempo transiente en segundos del eje d .
T'_{qo}	es la constante de tiempo transiente en segundos del eje q .
T''_{do}	es la constante de tiempo subtransiente en segundos del eje d .
T''_{qo}	es la constante de tiempo subtransiente en segundos del eje q .
δ	es el ángulo del rotor.
ω	es la velocidad del rotor.
ω_s	es la velocidad nominal del rotor.
f	es la frecuencia nominal del sistema.
E'_q	es el voltaje transiente en el eje q .
E'_d	es el voltaje transiente en el eje d .
X_d	es la reactancia sincrónica en el eje d .
X'_d	es la reactancia transiente en el eje d .
X_q	es la reactancia sincrónica en el eje q .
X'_q	es la reactancia transiente en el eje q .
E''_q	es el voltaje subtransiente en el eje q .
E''_d	es el voltaje subtransiente en el eje d .
X''_d	es la reactancia subtransiente en el eje d .
X''_q	es la reactancia subtransiente en el eje q .
E_{fd}	es el voltaje de campo.
I_q	es la corriente en el eje q .
I_d	es la corriente en el eje d .
T_m	es el torque mecánico.
P_e	es la potencia activa.
V_s	es el voltaje terminal.
I_s	es la corriente del estator.

En este trabajo, se simula el sistema utilizando el Power System Toolbox (PST) basado en MATLAB. El código para el EnKF y el PF [Cevallos et al. (9)] se desarrollaron dentro del archivo `ssimu.m` del PST como funciones para realizar la estimación de estado dinámica del sistema en estudio. La función `(.m)` del PST utilizada para modelar la máquina síncrona es `ssimu - mac sub`, que considera el voltaje detrás del modelo de reactancia subtransiente [Shultz (47)].

6.3. Implementación estimadores EnKF y PF

El rendimiento del EnKF y el PF se prueban y evalúan en un sistema de 14-bus de IEEE modificado en la cual, se introduce una perturbación por medio de una falla trifásica. El sistema IEEE de 14-bus fue modificado para cumplir con el nivel de voltaje en las barras de otros sistemas similares con diferentes niveles de voltajes en las barras

de las máquinas síncronas. En estos sistemas las máquinas están conectadas a través de un transformador ideal a la barra original. La topología del sistema no cambia, Fig. 6.1. El sistema de prueba IEEE de 14 barras después de la modificación se muestra en la Fig. 6.2.

Los generadores están equipados con reguladores de velocidad y reguladores de voltaje. Se considera un sistema multi máquinas que incluye:

1. Reactancias transitorias y subtransitorias en el modelo dinámico de la máquina síncrona como se muestra en 6.3 a 6.8.
2. Modelo dinámico para el sistema de regulación de tensión IEEE DC1A (IEEE Standard 421.5 -2005), aceptado por el IEEE para modelos de sistemas de excitación en estudios de estabilidad de sistemas de potencia [Demetriou et al. (14)], que corresponden al IEEE Tipo 1.
3. Modelo dinámico para el regulador de velocidad BPA GG WSCC Tipo G.

Cada máquina síncrona contribuye con 4 variables de estado: ángulo del rotor δ , velocidad angular del rotor ω , voltaje transiente en el eje d E'_d y el voltaje transiente en el eje q E'_q , que produce un total de 20 variables de estado para todo el sistema.

Los parámetros de cada máquina síncrona, reguladores de velocidad y reguladores de tensión se consideran con una base de 100 MVA [Demetriou et al. (14)]. Tablas 6.1 a 6.3.

La precisión de estimación de los filtros, PF y EnKF se comparan para un fallo equilibrado de tres fases. Se aplica una falla trifásica balanceada en la red eléctrica en la línea que conecta la barra 1 y la barra 2, en el tiempo $t = 0.1s$. El extremo cercano de la falla es la barra 1, y el extremo lejano de la falla es la barra 2. La falla es despejada en el extremo cercano, $0.01s$ después de ocurrencia de la falla trifásica (6.6 ciclos después), y es despejada en el extremo lejano después de $0.002s$ de despejar la falla en el extremo cercano (6.72 ciclos después).

Para capturar la dinámica del sistema y reducir los errores de integración el tiempo de paso de la simulación es de $\Delta t = 0.005[s]$ de acuerdo al file `ssimu.m` del PST. Un conjunto de muestras de tamaño $N = 50$ fue utilizado en EnKF, el número de partículas para el PF se estableció de igual forma en $N = 50$. Estos ajustes han mostrado buenos resultados en [Cui and Kavasseri (11)]. El EnKF y el PF se inicializaron con valores de estado estable obtenidos de las condiciones de pre-falla del sistema. Dos valores comúnmente conocidos se definen como constante: $f_0 = 60[Hz]$, $\omega_0 = 1.0[pu]$.

Las variables consideradas mediciones son el Par mecánico de la turbina (T_m), el voltaje de excitación (E_{fd}), la corriente terminal (I_t) y el voltaje terminal del generador (V_t). Un PMU puede ser ubicado en la barra de las máquinas síncronas [Ghahremani and Kamwa (23)] [Zhou et al. (62)] para obtener estas mediciones. La potencia eléctrica (P_e) es calculada.

Escenarios de simulación

6. ESTIMACIÓN DINÁMICA: FILTRO DE KALMAN DE ENSAMBLE Y FILTRO DE PARTÍCULAS EN LA ESTIMACIÓN DE ESTADOS EN SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA MULTIMÁQUINAS

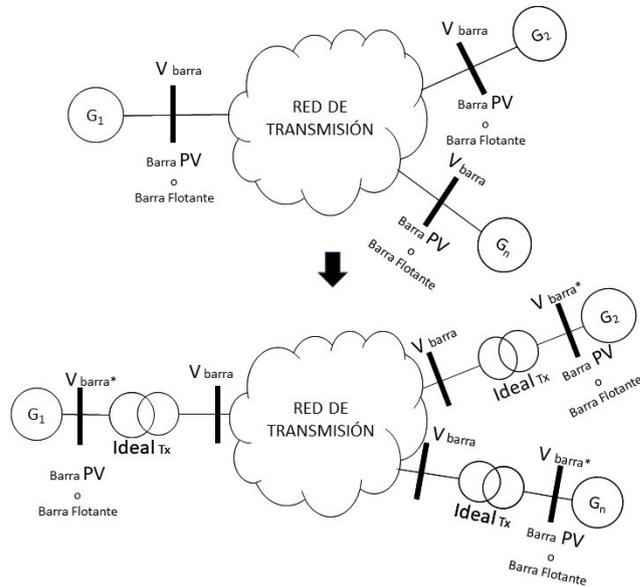


Figura 6.1: Conexión de máquina sincrónica usando un transformador ideal para adaptar los niveles de voltaje en un sistema existente.

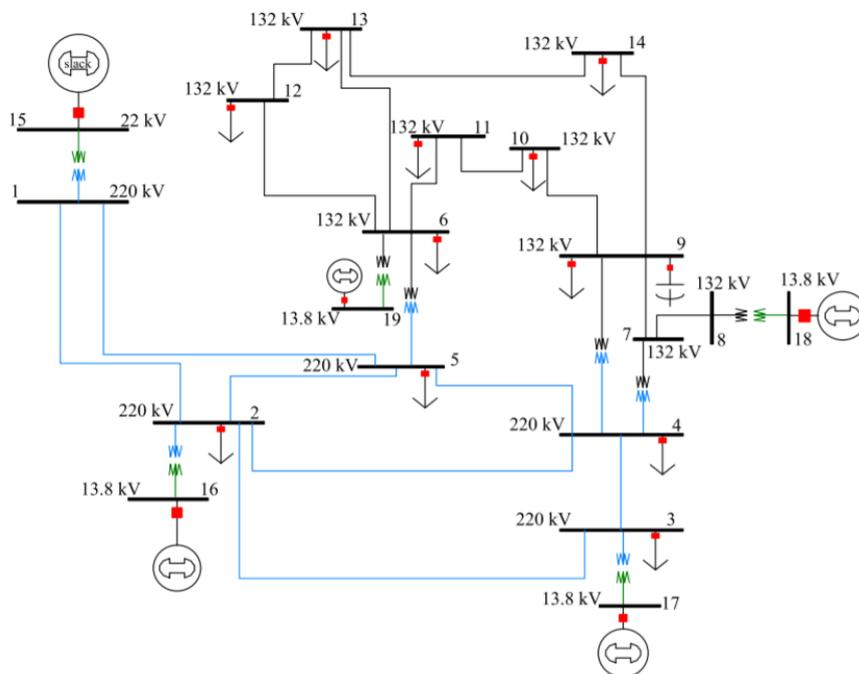


Figura 6.2: Sistema de prueba IEEE 14-barras modificado.

Para analizar el rendimiento de los estimadores EnKF y PF ante la presencia de ruidos Gaussianos y no Gaussianos se simula el sistema en dos escenarios diferentes.

1. Se contamina el sistema introduciendo un ruido en las variables de estado en cada paso y también a las mediciones con un ruido aleatorio aditivo distribuido Gaussiano de 1% con una media igual a cero y bajo nivel de variabilidad para considerar la incertidumbre de los errores del proceso y de las mediciones.
2. Posteriormente, para analizar la respuesta de los estimadores en consideración a la presencia de ruidos no Gaussianos se simula el sistema aplicando ruido no Gaussiano de acuerdo a [Huang et al. (29)] [Zhao et al. (60)], específicamente un modelo bimodal con medias (μ) 0 y 1 ambas con desviaciones (σ) 1%. Para generar el ruido no Gaussiano se usa la distribución bimodal y se hace la comparación del rendimiento de los estimadores para combinaciones de diferentes pesos (0.95 – 0.05, 0.9 – 0.1, 0.85 – 0.15, 0.80 – 0.2, y 0.75 – 0.25) y varianzas añadidas. El índice numérico utilizado para la evaluación de los estimadores es la raíz cuadrada del error cuadrático medio (rmse) y los tiempos de ejecución de los algoritmos.

6.4. Análisis de resultados y conclusiones

Los resultados de las simulaciones arrojaron los resultados que se muestran.

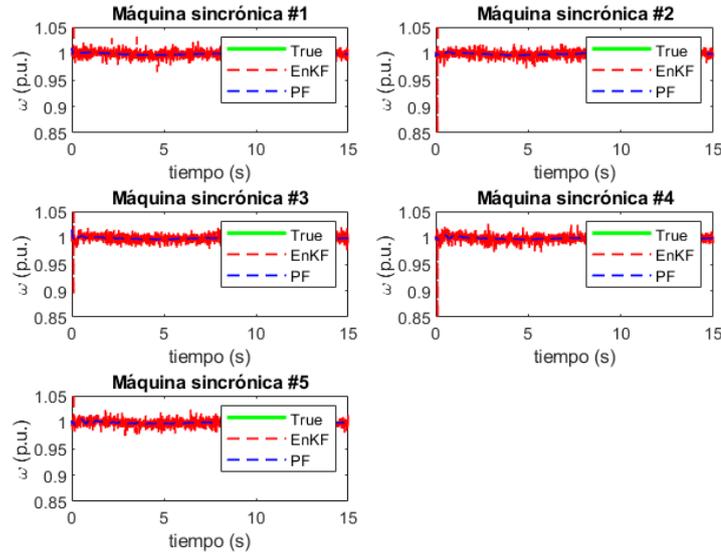


Figura 6.3: Velocidad angular: valores estimados y verdaderos. Filtro de Kalman de ensemble y filtro de partículas. Ruido con distribución normal.

6. ESTIMACIÓN DINÁMICA: FILTRO DE KALMAN DE ENSAMBLE Y FILTRO DE PARTÍCULAS EN LA ESTIMACIÓN DE ESTADOS EN SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA MULTIMÁQUINAS

Tabla 6.1: Sistema de pruebas IEEE 14-barras modificado. Datos máquinas sincrónicas - 100MVA BASE

Tipo	<i>GenSinc</i>	<i>GenSinc</i>	<i>CondSinc</i>	<i>CondSinc</i>
obn(mbn) ^a	1(15)	2(16)	3(17)	6(19), 8(18)
MVA	448	100	40	25
Asignado kV	22	13.8	13.8	13.8
$H(s)$	11.8989	4.985	0.6080	0.3000
r_a (p.u.)	0.00096	0.0035	0.000	0.0100
x_d (p.u.)	0.3728	1.180	5.9325	7.0760
x_q (p.u.)	0.3571	1.050	2.9300	3.4200
x'_d (p.u.)	0.0592	0.220	0.8575	1.2160
x'_q (p.u.)	0.1027	0.380	2.9300	2.3180
x''_d (p.u.)	0.0458	0.145	0.5775	0.8140
x''_q (p.u.)	0.0458	0.145	0.5775	0.8140
x_l (p.u.)	0.0335	0.075	0.33	0.4180
T'_{d0} (s)	0.5871	1.100	11.600	8.000
T'_{q0} (s)	0.1351	0.1086	0.1590	0.0080
T''_{d0} (s)	0.0248	0.0277	0.058	0.0525
T''_{q0} (s)	0.0267	0.0351	0.2010	0.0151
$S(1.0)$	0.091	0.0933	0.295	0.304
$S(1.2)$	0.400	0.4044	0.776	0.666

^anb(nbm): número de barra original (número de barra modificada).

Tabla 6.2: Sistema de pruebas IEEE 14-barras modificado. Datos Regulador de Voltaje: IEEE DC1A del estándar IEEE 421.5 (2005)

Tipo	<i>IEEE1</i>	<i>IEEE1</i>	<i>IEEE1</i>	<i>IEEE1</i>
nbo(nbm)^a	1(15)	2(16)	3(17)	6(19), 8(18)
MVA	448	100	40	25
kV	22	13.8	13.8	13.8
T_r (s)	0.000	0.060	0.000	0.000
K_a (p.u.)	50	25	400	400
T_a (s)	0.060	0.200	0.050	0.050
V_{Rmax} (p.u.)	1.000	1.000	16.630	4.407
V_{Rmin} (p.u.)	-1.000	-1.000	-16.630	-4.407
K_e (p.u.)	-0.0465	-0.0582	-0.170	-0.170
T_e (s)	0.520	0.6544	0.950	0.950
K_f (p.u.)	0.0832	0.105	0.040	0.040
T_f (s)	1.000	0.350	1.000	1.000
E_1 (p.u.)	3.240	2.5785	6.375	4.2375
$SE(E_1)$	0.072	0.0889	0.2174	0.2174
E_2 (p.u.)	4.320	3.438	8.500	5.650
$SE(E_2)$	0.2821	0.3468	0.9388	0.9386

^anbo(nbm): número de barra original (número de barra modificada).

6. ESTIMACIÓN DINÁMICA: FILTRO DE KALMAN DE ENSAMBLE Y FILTRO DE PARTÍCULAS EN LA ESTIMACIÓN DE ESTADOS EN SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA MULTIMÁQUINAS

Tabla 6.3: Sistema de pruebas IEEE 14-barras modificado. Datos Regulador de Velocidad: BPA GG WSCC Type G

Tipo	<i>TG</i>	<i>TG</i>
nbo(nbm) ^a	1(15)	2(16)
MVA	448	100
kV	22	13.8
W_f (p.u.)	1.0	1.0
$1/R$ (p.u.)	25	25
T_{max} (s)	1.0	1.0
T_s (s)	0.1	0.1
T_c (s)	0.5	0.5
T_3 (s)	0.0	0.0
T_4 (s)	1.25	1.25
T_5 (s)	10.000	0.000

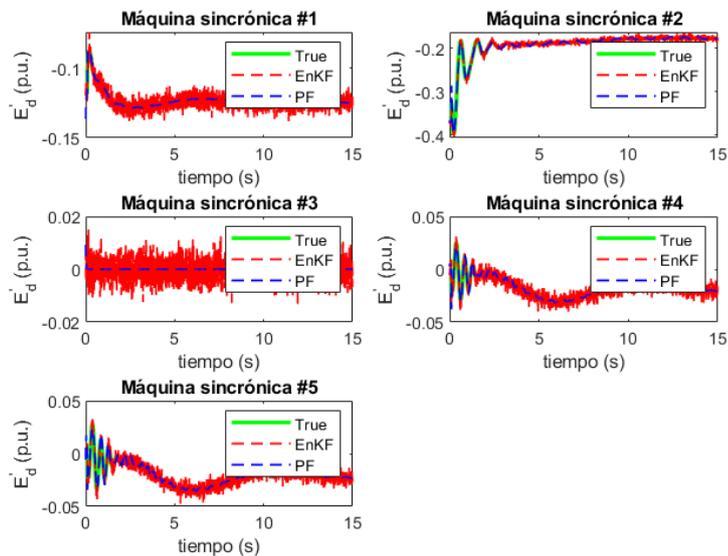


Figura 6.4: E_d prima: valores estimados y verdaderos. Filtro de Kalman de ensamble y filtro de partículas. Ruido con distribución normal.

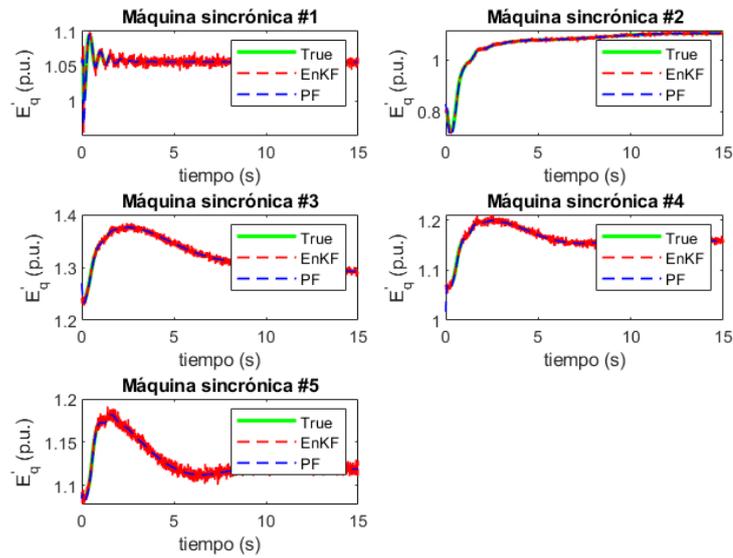


Figura 6.5: E_q prima: valores estimados y verdaderos. Filtro de Kalman de ensemble y filtro de partículas. Ruido con distribución normal.

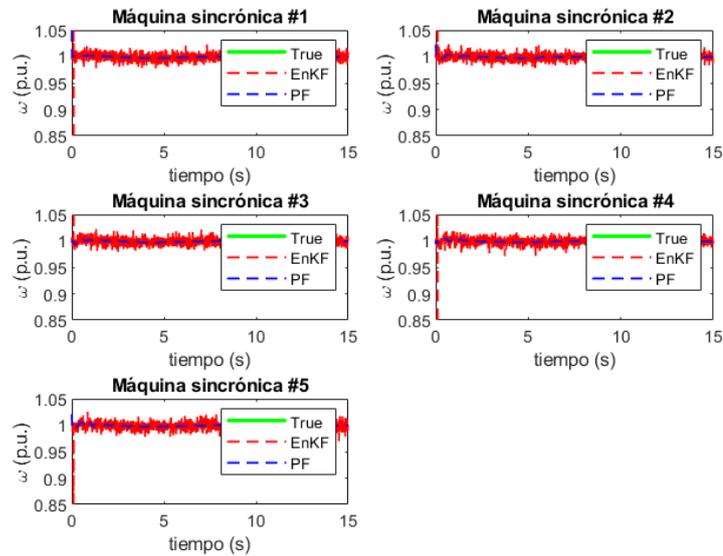


Figura 6.6: Velocidad angular: valores estimados y verdaderos. Filtro de Kalman de ensemble y filtro de partículas. Ruido con distribución bimodal. $p=0.95$.

6. ESTIMACIÓN DINÁMICA: FILTRO DE KALMAN DE ENSAMBLE Y FILTRO DE PARTÍCULAS EN LA ESTIMACIÓN DE ESTADOS EN SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA MULTIMÁQUINAS

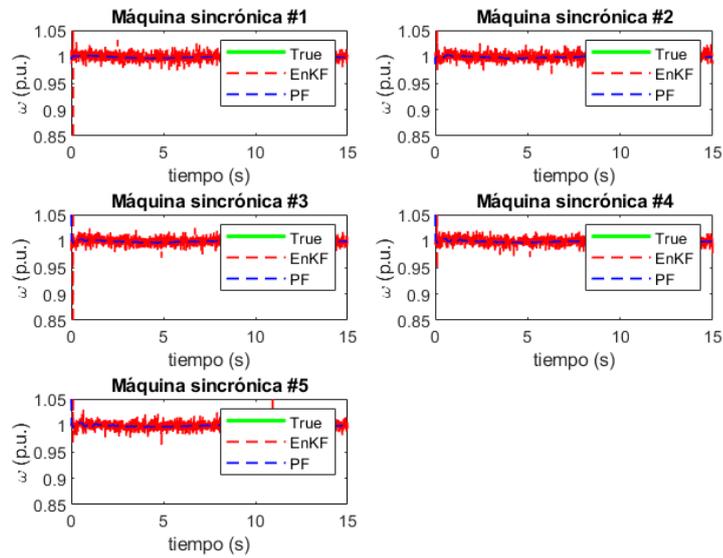


Figura 6.7: Velocidad angular: valores estimados y verdaderos. Filtro de Kalman de ensemble y filtro de partículas. Ruido con distribución bimodal. $p=0.90$.

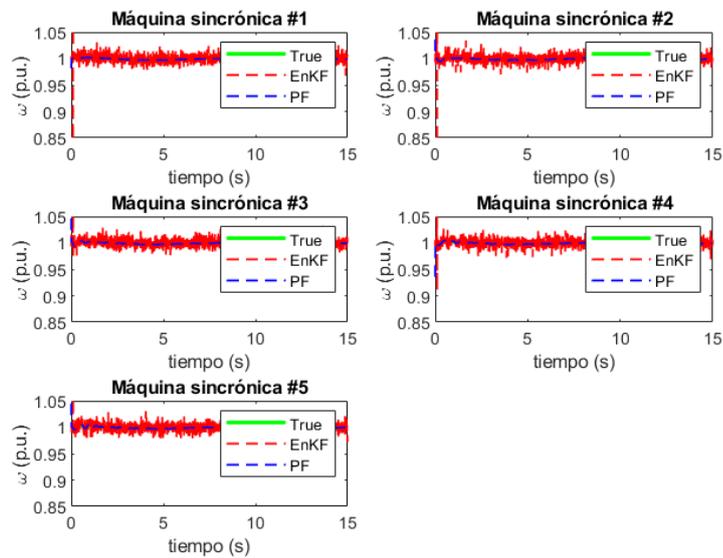


Figura 6.8: Velocidad angular: valores estimados y verdaderos. Filtro de Kalman de ensemble y filtro de partículas. Ruido con distribución bimodal. $p=0.85$.

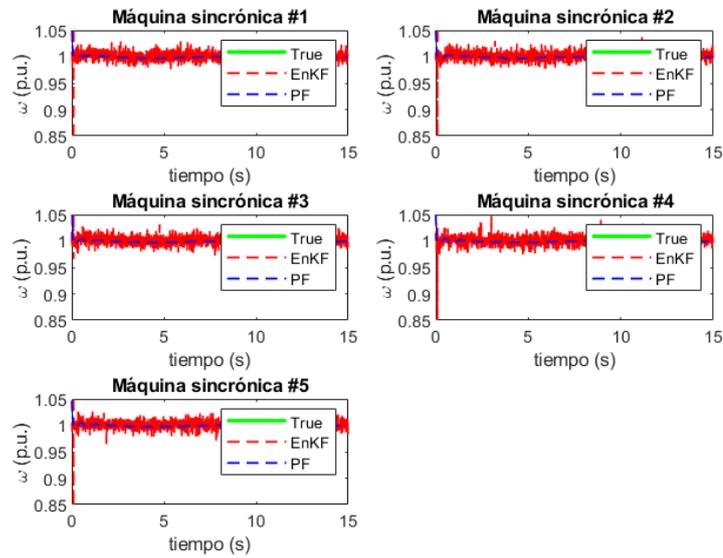


Figura 6.9: Velocidad angular: valores estimados y verdaderos. Filtro de Kalman de ensemble y filtro de partículas. Ruido con distribución bimodal. $p=0.75$.

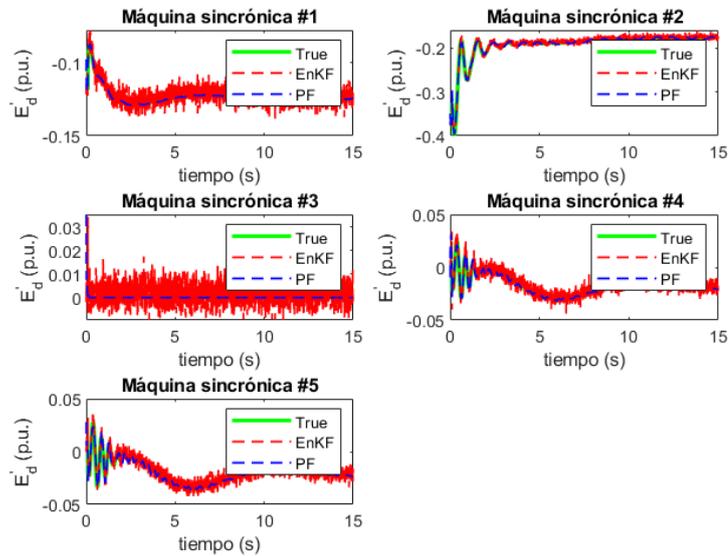


Figura 6.10: Edprima: valores estimados y verdaderos. Filtro de Kalman de ensemble y filtro de partículas. Ruido con distribución bimodal. $p=0.95$.

6. ESTIMACIÓN DINÁMICA: FILTRO DE KALMAN DE ENSAMBLE Y FILTRO DE PARTÍCULAS EN LA ESTIMACIÓN DE ESTADOS EN SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA MULTIMÁQUINAS

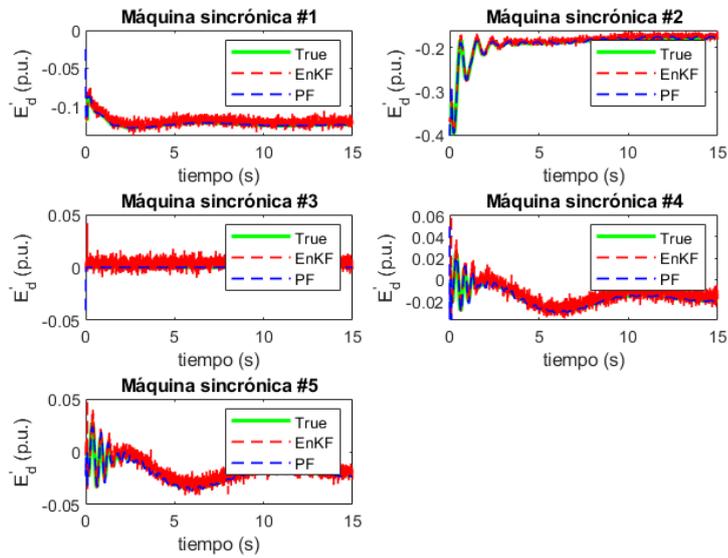


Figura 6.11: Edprima: valores estimados y verdaderos. Filtro de Kalman de ensamble y filtro de partículas. Ruido con distribución bimodal. $p=0.90$.

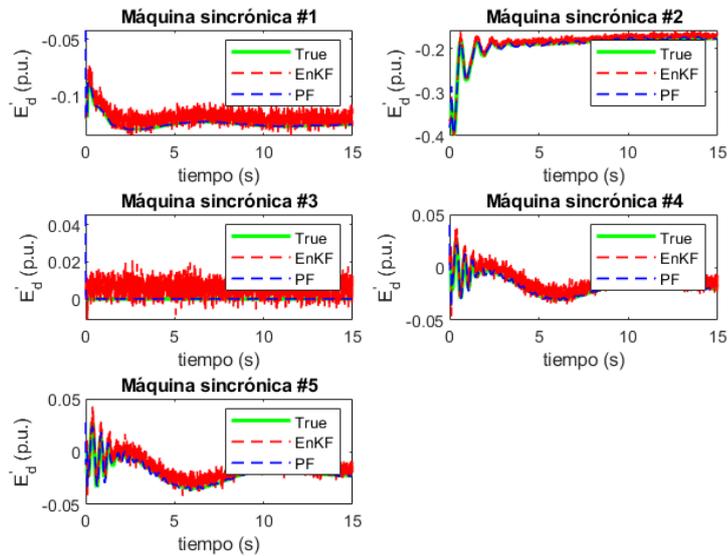


Figura 6.12: Edprima: valores estimados y verdaderos. Filtro de Kalman de ensamble y filtro de partículas. Ruido con distribución bimodal. $p=0.85$.

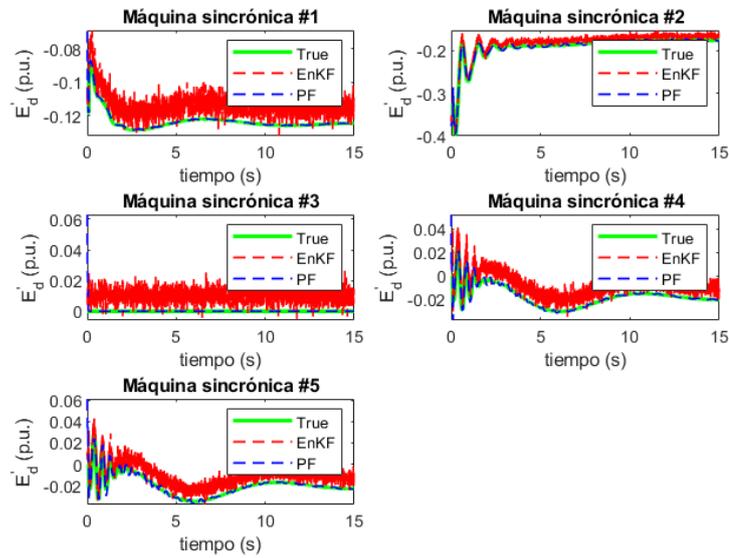


Figura 6.13: Edprima: valores estimados y verdaderos. Filtro de Kalman de ensemble y filtro de partículas. Ruido con distribución bimodal. $p=0.75$.

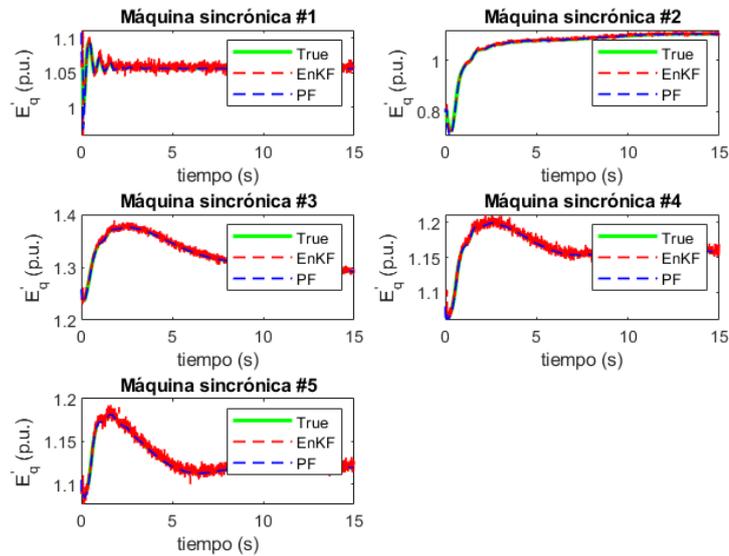


Figura 6.14: Eqprima: valores estimados y verdaderos. Filtro de Kalman de ensemble y filtro de partículas. Ruido con distribución bimodal. $p=0.95$.

6. ESTIMACIÓN DINÁMICA: FILTRO DE KALMAN DE ENSAMBLE Y FILTRO DE PARTÍCULAS EN LA ESTIMACIÓN DE ESTADOS EN SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA MULTIMÁQUINAS

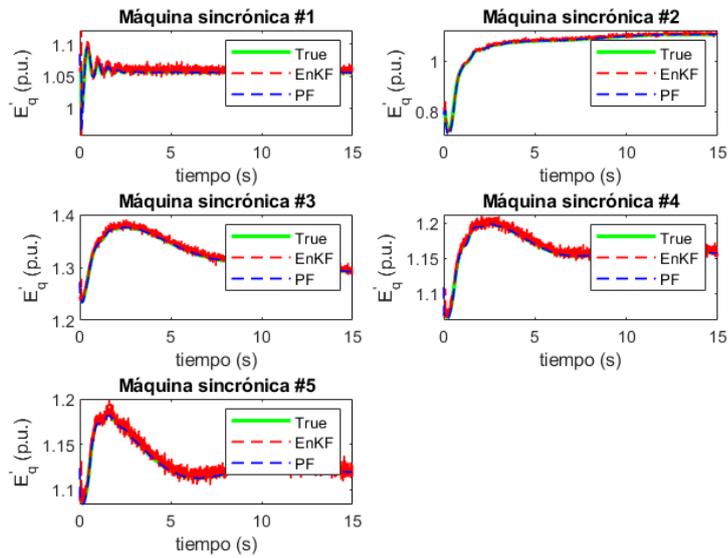


Figura 6.15: Eqprima: valores estimados y verdaderos. Filtro de Kalman de ensamble y filtro de partículas. Ruido con distribución bimodal. $p=0.90$.

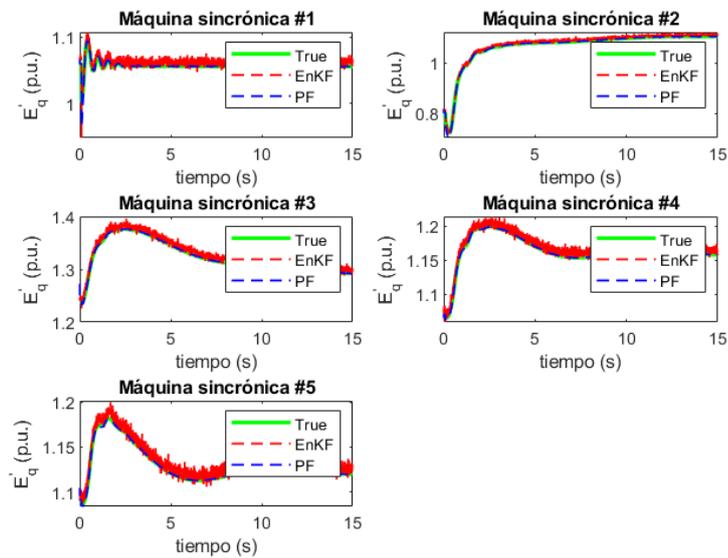


Figura 6.16: Eqprima: valores estimados y verdaderos. Filtro de Kalman de ensamble y filtro de partículas. Ruido con distribución bimodal. $p=0.85$.

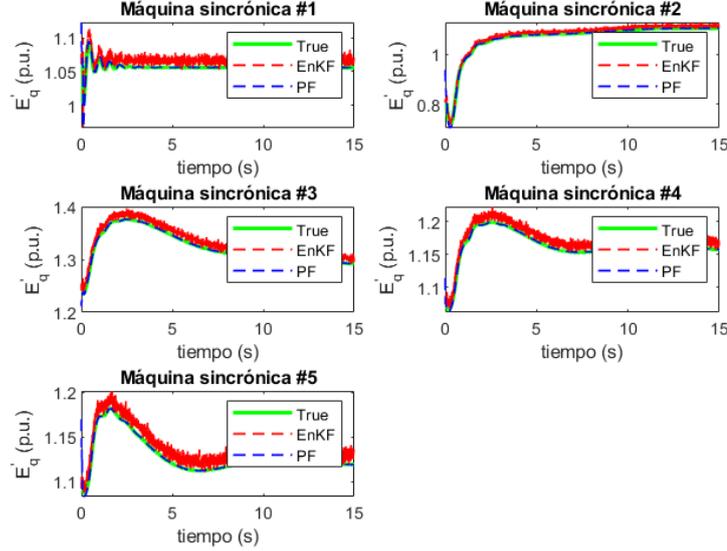


Figura 6.17: Eqprima: valores estimados y verdaderos. Filtro de Kalman de ensamble y filtro de partículas. Ruido con distribución bimodal. $p=0.75$.

De la figura 6.3 a la figura. 6.17, se muestra la respuesta dinámica de las variables de estado: E'_d , E'_q y ω . Los valores de las variables de estados verdaderos de la simulación están dados por líneas sólidas mientras que las líneas discontinuas representan los valores estimados de los filtros EnKF y PF. El número de partículas para el PF y el tamaño del conjunto para el ensamble del EnKF para cada variable de estado en la simulación es de 50. Se muestra la estimación de las variables de estado de las diferentes máquinas síncronas: generadores (unidades 1 y 2) y condensadores (unidades 3, 4 y 5) en el caso del sistema de prueba de 14-bus modificado. Se puede observar que, una vez aplicado el fallo, se inicia un período subtransitorio. El período de estabilización de las variables de estado comienza desde los 5s aproximadamente. El EnKF presenta una aproximación más ruidosa, que el PF, a los valores verdaderos.

Para analizar la respuesta de los estimadores en consideración a la presencia de ruidos no Gaussianos se simula el sistema aplicando ruido no Gaussiano de acuerdo a [Huang et al. (29)] [Zhao et al. (60)], específicamente un modelo bimodal con medias (μ) 0 y 1 y con desviaciones (σ) 1. Se simula el sistema con diferentes pesos p y se observan los resultados.

Debido a la aleatoriedad del ruido en las mediciones y el proceso, las performances de los filtros necesitan ser evaluados en un marco estadístico usando el método de MC para evitar las dificultades de la solución analítica. Los valores RMSE (raíz del error cuadrático medio) se evalúan de acuerdo a [Liu et al. (33)](6.9) como una medida de

6. ESTIMACIÓN DINÁMICA: FILTRO DE KALMAN DE ENSAMBLE Y FILTRO DE PARTÍCULAS EN LA ESTIMACIÓN DE ESTADOS EN SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA MULTIMÁQUINAS

precisión para comparar los errores entre los filtros estimadores PF y EnKF.

$$e_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^N (x_{i,k}^{est} - x_{i,k}^{true})^2}{nN}} \quad (6.9)$$

Donde, n es el número de generadores, N es el número de pasos k , y $x_{i,k}^{est}$ y $x_{i,k}^{true}$ representa el valor estimado y el valor verdadero del generador i en el paso k , respectivamente. Los datos obtenidos que se muestran en la tabla 6.4 se los presenta gráficamente en

Tabla 6.4: RMSE de los resultados de estimación del Filtro de Partículas (*PF*) y Filtro de Ensemble de Kalman (*EnKF*). Con ruidos de distribución normal y bimodales con diferentes pesos.

Variables de estados	Ruido		Ruido Dist. Bimodal									
	Dist. Normal		0.95		0.90		0.85		0.80		0.75	
	PF	EnKF	PF	EnKF	PF	EnKF	PF	EnKF	PF	EnKF	PF	EnKF
ω	0.0005	0.0121	0.0008	0.0104	0.0016	0.0119	0.0011	0.0117	0.0006	0.0138	0.0028	0.0127
E_d^i	0.0018	0.0041	0.0019	0.0046	0.0022	0.0059	0.0020	0.0075	0.0019	0.0093	0.0024	0.0111
E_q^i	0.0021	0.0041	0.0019	0.0047	0.0019	0.0060	0.0018	0.0075	0.0020	0.0092	0.0033	0.0112

las figuras: 6.18, 6.19, 6.20.

Los datos de los tiempos de ejecución de los diferentes estimadores se muestran en la tabla 6.5, además se los presenta en la figura 6.21. Los tiempos mostrados corresponden a la carga computacional correspondiente a la ejecución de los filtros estimadores PF y EnKF, mide el tiempo computacional de la ejecución de los correspondientes algoritmos desarrollados en funciones.m en matlab para cada estimador. Para comparar el tiempo computacional de los estimadores implementados en Matlab versión 2018a se utiliza una computadora con un procesador de 2.80 GHz, 16 GB de memoria y un sistema operativo de 64 bit, Windows 10.

En este capítulo se utiliza los filtros EnKF y PF para realizar la estimación dinámica de estados en el sistema eléctrico de prueba de la IEEE de 14 barras modificado y posterior análisis comparativo para determinar el filtro de mejor rendimiento en este tipo de aplicaciones. El PF y el EnKF son filtros que usan partículas o un conjunto de muestras, en el caso del EnKF, para representar y propagar la distribución de probabilidades de los estados. Usan generalmente el método de Monte Carlo para generar ruidos muestreados aleatoriamente de una distribución normal de probabilidad. Se ha contaminado tanto el proceso como las mediciones con ruido aleatorio normal en un escenario y en otro escenario se los ha contaminado con ruido aleatorio bimodal con diferentes pesos por ejemplo 0.95 y 0.05, 0.90 y 0.1, 0.85 y 0.15, 0.80 y 0.20 y, 0.75 y

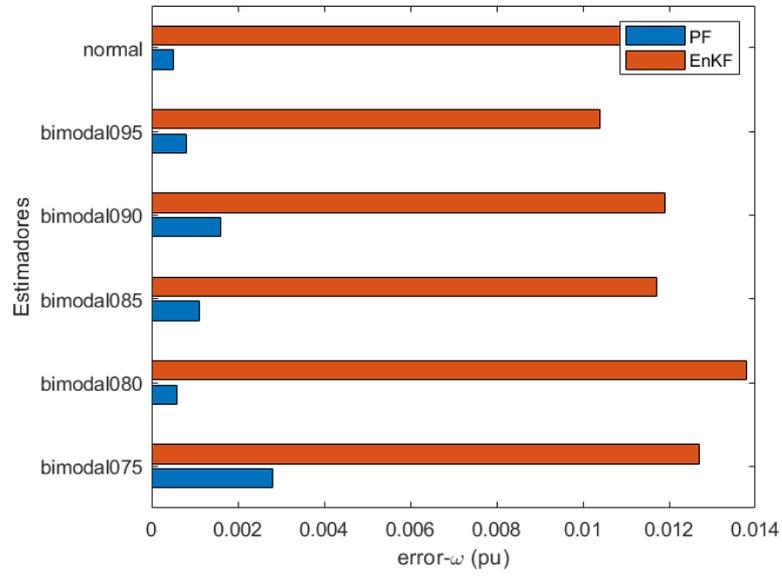


Figura 6.18: RMSE para la variable de estado ω

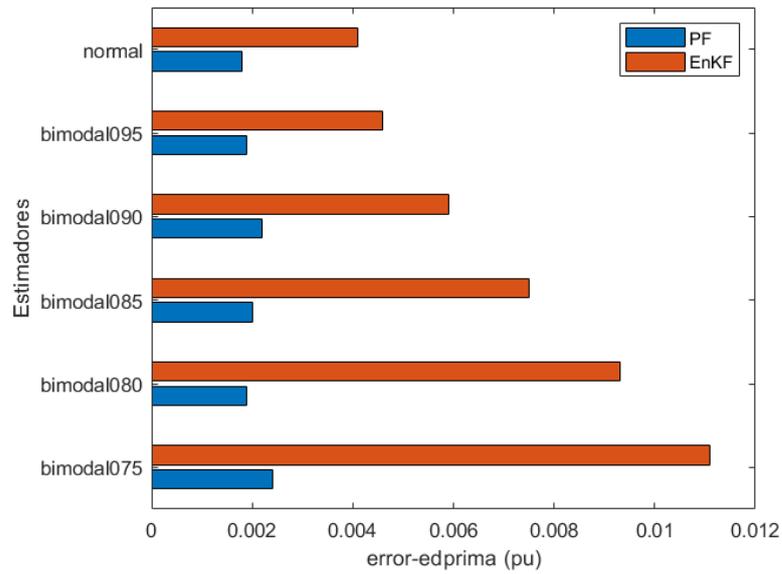


Figura 6.19: RMSE para la variable de estado E_d^x

6. ESTIMACIÓN DINÁMICA: FILTRO DE KALMAN DE ENSAMBLE Y FILTRO DE PARTÍCULAS EN LA ESTIMACIÓN DE ESTADOS EN SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA MULTIMÁQUINAS

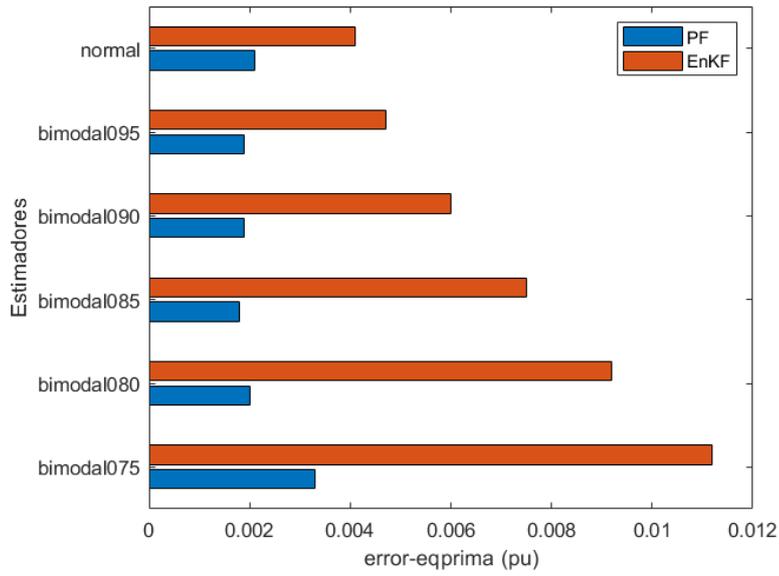


Figura 6.20: RMSE para la variable de estado $E_q^{i'}$

Tabla 6.5: Tiempos de ejecución: del Filtro de Partículas (PF) y Filtro de Ensemble de Kalman ($EnKF$). Con ruidos de distribución normal y bimodales con diferentes pesos.

Tiempo [s]	Ruido		Ruido Dist. Bimodal									
	Dist. Normal		0.95		0.90		0.85		0.80		0.75	
	PF	EnKF	PF	EnKF	PF	EnKF	PF	EnKF	PF	EnKF	PF	EnKF
t	0.2000	0.3126	0.1929	0.3367	0.1805	0.3444	0.2046	0.3461	0.1889	0.3372	0.1818	0.3482

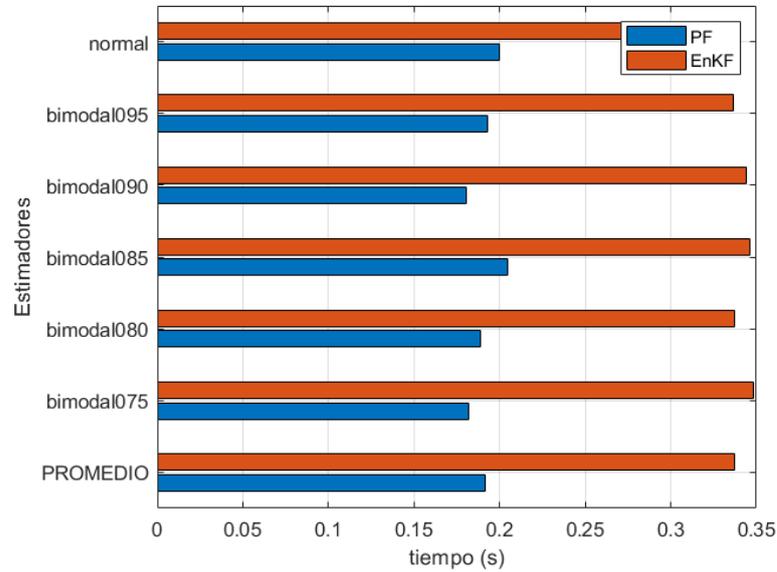


Figura 6.21: Tiempo de ejecución de los estimadores PF y EnKF

0.25. Basándose en los resultados de la simulación, se puede concluir según los datos resumidos en la tabla 6.4 y las figuras 6.18, 6.19, 6.20, donde se puede observar, que los valores de RMSE, definido en 6.9, en las variables de estado mostradas para el PF mantienen aproximadamente el mismo orden de magnitud tanto para la distribución normal como para la distribución bimodal de los ruidos aplicados. Mientras, para el estimador EnKF los valores RMSE del mismo se incrementan cuando la distribución bimodal varía su peso. Esto nos hace pensar que el estimador EnKF con respecto al PF es sensible a la aplicación de ruidos con distribución bimodal.

Con respecto a los tiempos de ejecución de los algoritmos del PF y el EnKF, de los resultados obtenidos que se muestran en la tabla 6.5 y la figura 6.21 se observa que el PF tiene un mejor tiempo computacional.

De acuerdo a lo expresado se puede considerar que comparativamente el PF produce estimaciones con mayor exactitud y en menos tiempo computacional que el EnKF.

Conclusiones

7.1. Introducción

En este trabajo se ha abordado el análisis comparativo del rendimiento de algunos estimadores en la estimación de estados en sistemas eléctricos de potencia, considerando la estimación estática y la estimación dinámica, contaminando con ruido el proceso y las mediciones. Se aplica algún tipo de perturbación sobre el sistema produciendo efectos diferentes sobre el mismo.

Los estimadores considerados en el caso de la estimación estática son el WLS, el EKF y el FP y el estudio comparativo se lo ha realizado sobre los sistemas de pruebas de la IEEE de 14 barras y de 30 barras, variando la carga porcentualmente con una tendencia lineal en determinadas barras.

Para el caso de la estimación dinámica se consideran los filtros EnKF y PF y se realiza el estudio comparativo tomando para el efecto el sistema de prueba de la IEEE de 14 barras el cual ha sido modificado para adaptarlo a cualquier nivel de voltaje típico. Se considera la respuesta dinámica de los generadores y condensadores síncronos del sistema ante una perturbación. La perturbación considerada es una falla trifásica.

Una vez obtenidos los resultados de la estimación estática y dinámica se procede a analizar comparativamente sus resultados con la finalidad de determinar el filtro de mejor rendimiento en cada caso.

Para determinar el rendimiento de los estimadores se considera:

1. La exactitud de los estimadores estableciendo el RMSE como una medición de la misma.
2. Para determinar la eficiencia computacional del algoritmo se selecciona el algoritmo de menor tiempo de ejecución. Tomando en consideración que la estimación del estado debe finalizar antes que llegue la siguiente medición.

7.2. Rendimiento de los estimadores Mínimos Cuadrados Ponderados, Filtro Extendido de Kalman y el Filtro de Partículas

En el capítulo 5 se muestran los resultados obtenidos en la aplicación de las estimaciones de estados usando las tres diferentes aproximaciones, WLS, EKF, y PF, para realizar la estimación estática de estados en sistemas eléctricos de potencia. Del análisis de los resultados realizados y que constan en las conclusiones del capítulo 5, se concluye que, el Filtro de Partículas presenta en los sistemas de pruebas de la IEEE de 14 y de 30 barras una mejor exactitud, pero con tiempos computacionales superiores de ejecución lo cual es una desventaja sobre los otros y ser determinantes en el momento de su aplicación. Sin embargo, con el desarrollo tecnológico continuo existente en el hardware de los centros de cómputo se pueden mejorar estos tiempos. El WLS y el EKF son computacionalmente más eficientes.

Los resultados obtenidos pueden ser considerados como referenciales en este tipo de investigaciones para compararlos contra otras técnicas relacionadas en la estimación de estados de sistemas eléctricos de potencia.

7.3. Filtro de Ensamble de Kalman y Filtro de Partículas en la estimación de estados en sistemas eléctricos de potencia multimáquinas

En el capítulo 6, se aplica el Filtro de Partículas de Muestreo de Importancia Secuencial (SIS PF) con un Remuestreo Sistemático (SysR) y el Filtro de Kalman de Ensamble (EnKF) para estimar dinámicamente las variables de estado de las máquinas síncronas: generadores y condensadores, conectados a un sistema eléctrico de prueba de 14-barras de la IEEE modificado. El sistema incluye en el proceso de estimación de los estados los reguladores de tensión y reguladores de velocidad del sistema de generación. Se ha contaminado tanto el proceso como las mediciones con ruido aleatorio normal en un escenario y en otro escenario se los ha contaminado con ruido aleatorio bimodal con diferentes pesos por ejemplo 0.95 y 0.05, 0.90 y 0.1, 0.85 y 0.15, 0.80 y 0.20 y, 0.75 y 0.25. Se puede observar según los datos resumidos y mostrados en el capítulo 6 que los valores RMSE de las variables de estado mostradas para el PF mantienen aproximadamente el mismo orden de magnitud tanto para la distribución normal como para la distribución bimodal de los ruidos aplicados. En el caso de la estimación dinámica en el cual se han comparado dos estimadores, casi de la misma naturaleza, el PF y el EnKF, que incorporan el método de Montecarlo en su metodología de desarrollo, pero con diferencias en la forma de propagar la información de los estados; el EnKF usa la

ganancia de Kalman mientras que el PF utiliza la multiplicación de las probabilidades de los estados y el remuestreo para propagar la información de los estados. Se reporta como un aporte novedoso, que en el caso del estimador EnKF los valores RMSE del mismo se incrementan sostenidamente cuando la distribución bimodal varía su peso disminuyéndolo, lo que produce que el ruido que se está aplicando tenga una distribución de probabilidad “más no Gaussiana”. En el caso del PF los valores del RMSE tienen una mayor estabilidad, Figura 6.18, Figura 6.19 y Figura 6.20. Esto nos hace pensar que el estimador EnKF con respecto al PF es sensible a la aplicación de ruidos con distribución bimodal. Se concluye que en el caso estudiado el PF es más robusto con respecto al EnKF ante la presencia de ruidos no Gaussianos. Con respecto a los tiempos de ejecución de los algoritmos del PF y el EnKF, los resultados obtenidos muestran que el PF tiene un mejor tiempo computacional.

El uso de otros dispositivos, como por ejemplo diferentes tipos de reguladores de tensión, reguladores de velocidad, estabilizadores del sistema de energía, incluir la estimación paramétrica, así como la consideración y desarrollo de otras técnicas de estimación se deja para ser investigado en futuros trabajos. De igual forma, dado el desarrollo que existe en la incorporación de fuentes de energía distribuida (DER) en las redes del lado del consumidor, incorporar esta topología de red en los estudios de estimación de las variables de estado del sistema.

Bibliografía

- [1] Abur, A. (2015). Observability and dynamic state estimation. In *2015 IEEE Power & Energy Society General Meeting*. IEEE. 68
- [2] Abur, A. and Expósito, A. G. (2004). *Power System State Estimation: Theory and Implementation (Power Engineering (Willis))*. CRC Press. 1, 22
- [3] Alhalali, S. M. O. and Elshatshat, R. A. (2015). State Estimator for Electrical Distribution Systems Based on a Particle Filter. pages 1–5. 51
- [4] Aminifar, F., Shahidehpour, M., Fotuhi-Firuzabad, M., and Kamalinia, S. (2014). Power system dynamic state estimation with synchronized phasor measurements. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 63(2):352–363. 2
- [5] Arulampalam, M., Maskell, S., Gordon, N., and Clapp, T. (2002). A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-gaussian bayesian tracking. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 50(2):174–188. 41
- [6] Blood, E. a., Krogh, B. H., and Ilić, M. D. (2008). Electric power system static state estimation through Kalman filtering and load forecasting. In *IEEE Power and Energy Society 2008 General Meeting: Conversion and Delivery of Electrical Energy in the 21st Century, PES*, pages 1–6. 2
- [7] Burgers, G., van Leeuwen, P. J., and Evensen, G. (1998). Analysis scheme in the ensemble kalman filter. *Monthly Weather Review*, 126(6):1719–1724. 38
- [8] Carpenter, J., Clifford, P., and Fearnhead, P. (1999). Improved particle filter for nonlinear problems. *IEE Proceedings - Radar, Sonar and Navigation*, 146(1):2. 41
- [9] Cevallos, H., Intriago, G., and Plaza, D. (2018). The extended kalman filter and the particle filter in the dynamic state estimation of electrical power systems. In *2018 IEEE Third Ecuador Technical Chapters Meeting (ETCM)*. IEEE. 70
- [10] Crisan, D. (2001). Particle filters — a theoretical perspective. In *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*, pages 17–41. Springer New York. 44

- [11] Cui, Y. and Kavasseri, R. (2015). A particle filter for dynamic state estimation in multi-machine systems with detailed models. *IEEE Transactions on Power Systems*, 30(6):3377–3385. [68](#), [71](#)
- [12] Cui, Y. and Kavasseri, R. (2016). A particle filter for dynamic state estimation in multi-machine systems with detailed models. In *2016 IEEE Power and Energy Society General Meeting (PESGM)*. IEEE. [69](#)
- [13] Cui, Y., Kavasseri, R. G., and Brahma, S. M. (2017). Dynamic state estimation assisted out-of-step detection for generators using angular difference. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 32(3):1441–1449. [3](#)
- [14] Demetriou, P., Asprou, M., Quiros-Tortos, J., and Kyriakides, E. (2017). Dynamic IEEE test systems for transient analysis. *IEEE Systems Journal*, 11(4):2108–2117. [71](#)
- [15] Doshi, D. and Chankaya, M. (2017). Particle filter based state estimation of power system. In *2017 International Conference on Recent Trends in Electrical, Electronics and Computing Technologies (ICRTEECT)*. IEEE. [41](#)
- [16] Doucet, A. (1998). On sequential simulation-based methods for bayesian filtering. *Technical Report CUED/F-INFENG/TR. 310. Cambridge University Department of Engineering*. [44](#), [47](#)
- [17] Doucet, A., Freitas, N., and Gordon, N. (2001). An introduction to sequential monte carlo methods. In *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*, pages 3–14. Springer New York. [41](#)
- [18] Emami, K., Fernando, T., Iu, H. H.-C., Trinh, H., and Wong, K. P. (2015). Particle filter approach to dynamic state estimation of generators in power systems. *IEEE Transactions on Power Systems*, 30(5):2665–2675. [69](#)
- [19] Emami, K., Fernando, T., and Nener, B. (2014). Power system dynamic state estimation using particle filter. In *IECON 2014 - 40th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*. IEEE. [2](#)
- [20] Evensen, G. (1994a). Sequential data assimilation with a nonlinear quasi-geostrophic model using monte carlo methods to forecast error statistics. *Journal of Geophysical Research*, 99(C5):10143. [2](#)
- [21] Evensen, G. (1994b). Sequential data assimilation with a nonlinear quasi-geostrophic model using Monte Carlo methods to forecast error statistics. *J. Geophys. Res*, 99(C5):10143–10162. [21](#), [34](#), [69](#)
- [22] Geweke, J. (1989). Bayesian inference in econometric models using monte carlo integration. *Econometrica*, 57(6):1317. [44](#)

-
- [23] Ghahremani, E. and Kamwa, I. (2011). Online state estimation of a synchronous generator using unscented kalman filter from phasor measurements units. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, 26(4):1099–1108. 71
- [24] Grewal, M. S. and Andrews, A. P. (2001). *Kalman Filtering : Theory and Practice Using MATLAB*. Wiley-Interscience, 2 edition. 27
- [25] Gustafsson, F. (2010). Particle filter theory and practice with positioning applications. *IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine*, 25(7):53–82. 2
- [26] Hernandez, C. and Maya-Ortiz, P. (2015). Comparison between WLS and kalman filter method for power system static state estimation. In *2015 International Symposium on Smart Electric Distribution Systems and Technologies (EDST)*. IEEE. 21
- [27] Houtekamer, P. L. and Mitchell, H. L. (2001). A sequential ensemble kalman filter for atmospheric data assimilation. *Monthly Weather Review*, 129(1):123–137. 37
- [28] Huang, Y.-F., Werner, S., Huang, J., Kashyap, N., and Gupta, V. (2012). State Estimation in Electric Power Grids: Meeting New Challenges Presented by the Requirements of the Future Grid. *IEEE Signal Processing Magazine*, 29(5):33–43. 21
- [29] Huang, Z., Zhou, N., Diao, R., Wang, S., Elbert, S., Meng, D., and Lu, S. (2015). Capturing real-time power system dynamics: Opportunities and challenges. In *2015 IEEE Power & Energy Society General Meeting*. IEEE. 51, 73, 83
- [30] Kalman, R. E. (1960a). A new approach to linear filtering and prediction problems. *J. Basic Eng-T ASME*, 82(Series D):35–45. 21
- [31] Kalman, R. E. (1960b). A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of Basic Engineering*, 82(1):35. 68
- [32] Liu, E. (2011). Smart Distribution Systems y -. *Technology*, 28(2):1–16. 2
- [33] Liu, H., Hu, F., Su, J., Wei, X., and Qin, R. (2020). Comparisons on kalman-filter-based dynamic state estimation algorithms of power systems. *IEEE Access*, 8:51035–51043. 34, 83
- [34] Meliopoulos, A. P. S., Cokkinides, G. J., Myrda, P., Liu, Y., Fan, R., Sun, L., Huang, R., and Tan, Z. (2017). Dynamic state estimation-based protection: Status and promise. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 32(1):320–330. 3
- [35] Monticelli, A. (2000). Electric power system state estimation. *Proceedings of the IEEE*, 88. 1, 25
- [36] Netto, M., Zhao, J., and Mili, L. (2016). A robust extended kalman filter for power system dynamic state estimation using PMU measurements. IEEE. 1
-

- [37] Nguyen, H., Venayagamoorthy, G., Kling, W., and Ribeiro, P. (2013). Dynamic state estimation and prediction for real-time control and operation. *Power Systems Conference 2013 (PS13)*. 54
- [38] Rouhani, A. and Abur, A. (2016). Measurement selection for observability in dynamic state estimation. In *2016 Power Systems Computation Conference (PSCC)*. IEEE. 68
- [39] Rouhani, A. and Abur, A. (2017). Observability analysis for dynamic state estimation of synchronous machines. *IEEE Transactions on Power Systems*, 32(4):3168–3175. 68
- [40] Sarfi, V., Ghasemkhani, A., Niazazari, I., Livani, H., and Yang, L. (2019). Decentralized dynamic state estimation with bimodal gaussian mixture measurement noise. In *2019 North American Power Symposium (NAPS)*. IEEE. 2
- [41] Sauer, P. (2006). *Power system dynamics and stability*. Stipes Publishing L.L.C, Champaign, IL. 69
- [42] Schweppe, F. (1970). Power System Static-State Estimation, Part III: Implementation. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-89(1):130–135. 1
- [43] Schweppe, F. and Rom, D. (1970). Power System Static-State Estimation, Part II: Approximate Model. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-89(1):125–130. 1
- [44] Schweppe, F. C. and Wildes, J. (1969). Power system static state estimation. I - exact model. In *1969 power industry computer applications conference, 18-21 May 1969*, pages 85–91. 1
- [45] Shabani, F., Seyedyazdi, M., Vaziri, M., Zarghami, M., and Vadhva, S. (2015). State estimation of a distribution system using WLS and EKF techniques. In *2015 IEEE International Conference on Information Reuse and Integration*. IEEE. 25, 30
- [46] Sharma, A., Srivastava, S. C., and Chakrabarti, S. (2017). A Cubature Kalman Filter Based Power System Dynamic State Estimator. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 66(8):2036–2045. XIII, 50, 51, 54, 55
- [47] Shultz, R. (IEEE. San Francisco 1975.). Synchronous machine modelling. *Winter Meeting Papers: Symposium on Adequacy and Philosophy of Modeling: Dynamic System Performance*. 70
- [48] Simon, D. (2006). *Optimal State Estimation: Kalman, H Infinity, and Nonlinear Approaches*. Wiley-Interscience, 1st edition. 2
- [49] Singh, A. and Pal, B. (2016). Decentralized control of oscillatory dynamics in power systems using an extended LQR. In *2016 IEEE Power and Energy Society General Meeting (PESGM)*. IEEE. 3

-
- [50] Singh, A. K. and Pal, B. C. (2018). Decentralized nonlinear control for power systems using normal forms and detailed models. In *2018 IEEE Power & Energy Society General Meeting (PESGM)*. IEEE. 3
- [51] Song, W., Lu, C., Lin, J., Zhu, C., and Zhang, S. (2021). Power system state estimation based on PMU under linear bayesian theory. IEEE. 3
- [52] Therrien, F., Kocar, I., and Jatskevich, J. (2013). A Unified Distribution System State Estimator Using the Concept of Augmented Matrices. *IEEE Transactions on Power Systems*, 28(3):3390–3400. 2
- [53] University, W. (1993). IEEE 14 bus test case. <http://www2.ee.washington.edu/research/pstca/pf14/ieee14cdf.txt>. [Online; accessed 20-marzo-2018]. 49
- [54] Valverde, G. and Terzija, V. (2011a). Unscented kalman filter for power system dynamic state estimation. *Generation, Transmission & Distribution, IET*, 5(1):29–37. 1, 2, 21, 51, 54
- [55] Valverde, G. and Terzija, V. (2011b). Unscented kalman filter for power system dynamic state estimation. *IET Generation, Transmission & Distribution*, 5(1):29. 68
- [56] Xu, C. and Abur, A. (2018). A fast and robust linear state estimator for very large scale interconnected power grids. *IEEE Transactions on Smart Grid*, 9(5):4975–4982. 1
- [57] Zanni, L., Le Boudec, J. Y., Cherkaoui, R., and Paolone, M. (2017). A Prediction-Error Covariance Estimator for Adaptive Kalman Filtering in Step-Varying Processes: Application to Power-System State Estimation. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 25(5):1683–1697. 54
- [58] Zhang, L., Bose, A., Jampala, A., Madani, V., and Giri, J. (2017). Design, testing, and implementation of a linear state estimator in a real power system. *IEEE Transactions on Smart Grid*, 8(4):1782–1789. 1
- [59] Zhao, J. and Mili, L. (2019). Robust unscented kalman filter for power system dynamic state estimation with unknown noise statistics. 10(2):1215–1224. 27
- [60] Zhao, J., Netto, M., and Mili, L. (2017). A robust iterated extended kalman filter for power system dynamic state estimation. *2017 IEEE Power & Energy Society General Meeting*, 32(4):3205–3216. 73, 83
- [61] Zhao, J., Qi, J., Huang, Z., Meliopoulos, A. P. S., Gomez-Exposito, A., Netto, M., Mili, L., Abur, A., Terzija, V., Kamwa, I., Pal, B., and Singh, A. K. (2019). Power system dynamic state estimation: Motivations, definitions, methodologies, and future work. *IEEE Transactions on Power Systems*, 34(4):3188–3198. 3, 68

BIBLIOGRAFÍA

- [62] Zhou, N., Meng, D., Huang, Z., and Welch, G. (2015). Dynamic state estimation of a synchronous machine using PMU data: A comparative study. In *2015 IEEE Power & Energy Society General Meeting*. IEEE. [68](#), [71](#)
- [63] Zhou, N., Meng, D., and Lu, S. (2013). Estimation of the dynamic states of synchronous machines using an extended particle filter. *IEEE Transactions on Power Systems*, 28(4):4152–4161. [41](#)