LA FUNCION DE COBB-DOUGLAS Y SU APLICACION EN LA DETERMINACION DEL TAMAÑO OPTIMO DE LA EMPRESA AGRARIA. AREA DE SAN RAFAEL - MENDOZA - ARGENTINA*

LUIS HERNÁNDEZ **
ERNESTO MAVRICH ***
GRACIELA FASCIOLO DE BAGINI ****
MARÍA E. VIDELA *****

SUMMARY

It has been proved that the application of the Cobb-Douglas function to the determination of the agricultural enterprise optimum size, in the San Rafael area, allows to abtain acceptable solutions for this area.

However, the determination of the optimum productions, as function of the improvement of the variables which conform the calculated function, does not always reaen acceptable results according to facts.

Marginal analysis practiced from the calculated function has demostrated that available production resources are not used efficiently by the agricultural enterprises, and has also suggested that an adequate recombination of these resources would lead to the attainment of better economic results.

The optimum calculated size, 10,7 ha, for a viticultural enterprise, developed by a standard rural family, can be accepable, considering the great importance of the land resource in the costs estructure and what has been observed in facts.

1 – INTRODUCCION

La determinación del tamaño óptimo de la explotación agropecuaria es la máxima aspiración a alcanzar por todo interesado en el tema.

(*) Trabajo realizado con el auspicio de la Comisión Asesora de Promoción de la Investigación (C.A.P.I.), de la Universidad Nacional de Cuyo.

(**) Investigador en Economía Agraria.
(***) Profesor Titular Efectivo de la cátedra Cálculo Estadístico y Biometría.
(****) y (*****) Auxiliares de Docencia de la cátedra Cálculo Estadístico y Biometría.

La importancia del problema sobrepasa con amplitud el aspecto meramente individual del productor para alcanzar la dimensión e intereses de la comunidad entera, sin importar si esta última está o no relacionada directamente con la producción agropecuaria.

Este trabajo tiene como principal objetivo el de analizar y discutir la aplicación de uno de los métodos más conocidos y utilizados en estudios de economía agraria —la función de producción Cobb-Douglas— en la determinación del tamaño óptimo de la empresa agropecuaria.

El concepto de tamaño, en la empresa agropecuaria, no se refiere exclusivamente al volumen físico del recurso tierra, sino que representa una idea mucho más amplia, y que tiene en cuenta a todos los recursos productivos que intervienen en una explotación agropecuaria, incluyendo la gestión administrativa del empresario.

Cuando todos los factores trabajan en armonía y con la máxima eficiencia, se dice, que la empresa está optimizada. El problema consiste en determinar cuándo se alcanza esa situación. Conseguir la optimización en el uso de los recursos productivos, significa la obtención de mayores ventajas económicas, cuyo destinatario será el empresario individual o la comunidad toda, según el criterio que se utilice para determinarla. Es por ello, que el tamaño óptimo es un concepto relativo, ya que depende de quien es el destinatario de las ventajas que de él deriven, por ej., desde el punto de vista del empresario, éste tratará de hacer máximo el beneficio neto de su empresa; mientras que, desde el punto de vista social, interesará hacer máxima la relación: valor de la producción/unidad de recursos empleados.

En otras palabras, al empresario más le preocupará hacer máxima la ganancia y para ello tratará de optimizar el uso de los recursos productivos que más le interesan, es decir que el concepto de óptimo responde a una actitud selectiva y de interés propio. En cambio desde el punto de vista social interesará optimizar el uso de todos los recursos productivos a la vez, para alcanzar la mayor proporción de producto por cantidad de recursos puestos en juego.

Dado el carácter histórico de la información utilizada en la elaboración del trabajo, es que se llama la atención del lector en el sentido de que las conclusiones que se deriven tendrán un carácter exclusivamente ilustrativo, valedero para el área rural de donde se obtuvo la información básica.

1.1 — *Características del Area* [1]

El área se localiza en el departamento de San Rafael, provincia de Mendoza, a unos 240 km al sur de la capital de la provincia.

Las condiciones ecológicas del área la hacen apta para la explotación de cultivos intensivos, muy especializados y de elevada rentabilidad por unidad de superficie, pero que a su vez exigen una alta inversión de capital.

Esta elevada densidad de capital por unidad productiva es consecuencia de la infraestructura que es necesario crear para hacer posible la producción.

Su principal característica consiste en el tipo de agricultura que se practica, bajo riego en un 100% y, con predominio de la viticultura, fruticultura de carozo y en menor cuantía la horticultura y forrajicultura, como puede observarse en el siguiente cuadro.

Cuadro Nº 1

USO DE LA TIERRA EN % — AREA DE SAN RAFAEL
(Provincia de Mendoza)

Items	*Predios + de 50 ha (en %)*	*Predios — de 50 ha (en %)*	*Media pond. (en %)*
Viñedos	45,0	63,0	61,0
Frutales	30,0	15,0	18,0
Hortícolas	5,0	6,0	6,0
Otros	7,0	16,0	12,0
Sub-total: Cultivos individuales	87,0	100,0	97,0
Viñedos/Frutales	13,0	0,0	3,0
Sub-total: Cultivos intercalados	13,0	0,0	3,0
Total	100,0	100,0	100,0

Respecto a la contribución de cada uno de los rubros expuestos en el cuadro anterior en cuanto a la composición de la Entrada Bruta se tiene:

Cuadro Nº 2

COMPOSICION DE LA ENTRADA BRUTA EN %

AREA DE SAN RAFAEL — Provincia Mendoza

Participación en la E. B.	*Estrato ≤ de 50 ha (en %)*	*Estrato + de 50 ha (en %)*
Viñedos	59,2	80,6
Frutales	30,6	8,4
Otros	10,2	11,4
Total	100,0	100,0

En cuanto a la estructura del capital en valores relativos, tenemos:

Cuadro Nº 3

ESTRUCTURA DEL CAPITAL EN % — AREA DE SAN RAFAEL

(Provincia de Mendoza)

Capital	*Predios - ≤ de 50 ha (en %)*	*Predios + de 50 ha (en %)*	*Media Pond. (en %)*
Tierra más Cult. permanentes	72,4	85,6	83,4
Construcción y alambradas	13,0	5,8	7,0
Equipo	10,9	4,4	5,5
Ganado	0,1	1,1	1,0
Otros	0,1	0,1	0,1
Cap. Circulante	3,5	3,0	3,0
	100,0	100,0	100,0

Y por último, se inserta un cuadro de rendimiento por unidad de superficie de los principales cultivos, a los efectos de completar un panorama general de las principales características del área.

Cuadro Nº 4

RENDIMIENTOS PROMEDIOS QUINQUENIO 1958/1963

AREA DE SAN RAFAEL — Provincia Mendoza

Cultivos	*Rendimiento por*	
	Planta	*ha*
Uva vinificar	—	70,0 qq
Ciruelos	19,5 kg	7.800 kg
Durazneros	8,5 kg	3.400 kg
Tomate	—	8.180 kg
Pimiento	—	5.200 kg

Fuente: Ia información de los cuadros 1, 2, 3 y 4 fue extraída del trabajo "Análisis Económico de la Empresa Agraria — Area San Rafael - Mendoza - 1967 — I.I.C.A. — O.E.A.".

La superficie total cultivada en el área de San Rafael de acuerdo a la estimación año 1969 [2] es de 54.520 ha; esta superficie insume aproximadamente 3.300.000 jornadas/año, o 11.000 equivalentes hombres/año.

2 — OBJETIVOS

Probar la aplicabilidad de la función de Cobb-Douglas en la determinación del tamaño óptimo de las explotaciones agropecuarias desde el punto de vista del interés particular del empresario. Dejando para un trabajo posterior el análisis desde el punto de vista del interés de la comunidad.

3 — METODOLOGIA

Para alcanzar los objetivos previstos pueden seguirse dos caminos. Uno, el que se utiliza en el presente trabajo, y que consiste en la obtención de una función de producción basada en observaciones reales y de carácter histórico, que por tal motivo puede denominarse proceso realista. El otro se basa en la aplicación de la programación lineal, que como su nombre lo indica, es un proceso normativo.

Una función de producción es la expresión matemática de las relaciones de insumo-producto que se establecen entre los recursos productivos y el producto final, y se simboliza así:

$$Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

Las relaciones de insumo-producto que pueden establecerse pueden ser de carácter lineal o curvilineal.

Las relaciones lineales indican cambios proporcionales entre las variables dependiente e independientes. En cambio, las relaciones curvilineales indican cambios no proporcionales.

Si se parte del supuesto, que las relaciones de insumo-producto en agricultura son de tipo no lineales, la función de producción a obtenerse deberá contemplar la posibilidad de cambios no proporcionales entre las variables en juego.

La función de Cobb-Douglas [3] permite expresar relaciones de insumo-producto de tipo curvilineal y su éxito y difusión se debe a que:

a) Puede ser transformada fácilmente en una función lineal, previa transformación logarítmica, la cual la hace muy práctica en su aplicación.

b) Permite obtener directamente las elasticidades parciales y totales por intermedio de sus coeficientes de regresión parcial, siendo por otra parte una función de elasticidad constante.

c) Además las productividades marginales de sus componentes son decrecientes.

En forma general la función de Cobb-Douglas se expresa así:

$$Y = a \cdot X_1^{b_1} \cdot X_2^{b_2} \ldots X_n^{b_n}$$

4 – VARIABLES SELECCIONADAS

Y: Entrada bruta/predio, E.B., expresado en m$n.

Comprende los ingresos en concepto de:

a) Venta de uva
b) " " frutas
c) " " productos hortícolas
d) " " forrajes
e) " " otros.

X_1: Jornadas totales efectivas/predio, J.T., expresados en m$n.
X_2: Gastos de cultivo/predio, G. Cult., expresado en m$n.

Comprende los gastos en concepto de:

a) Plaguicidas
b) Abonos
c) Barbados
d) Cepas
e) Totora
f) Semillas
g) Otros.

X_3: Gastos de equipo/predio, G.Eq., expresados en m$n.

Comprende gastos en:

a) Forraje
b) Combustibles y lubricantes
c) Reparaciones
d) Otros.

X_4: Superficie cultivada/predio, Sup., expresada en m$n.

X_5: Gastos del capital/predio, G. Cap, expresado en m$n.

Comprende los intereses y amortizaciones del capital fijo y circulante.

5 – PROCESO ANALITICO

Previo al cálculo de la función de producción se ha considerado conveniente caracterizar estadísticamente a las variables seleccionadas, como se muestra en los siguientes cuadros:

Cuadro Nº 5

MEDIAS SIMPLES, COEFICIENTE DE CORRELACION SIMPLE Y SIGNIFICANCIA ESTADISTICA

Variables	*Media simple m$n*	*Coef. correlac. simple* $ry.xi$	*Significación estadística* $N=42$
Y	1.301.968	——	——
X_1	342.358	0,860	++
X_2	85.675	0,814	++
X_3	180.675	0,706	++
X_4	278.766	0,813	++
X_5	451.147	0,787	++

Cuadro Nº 6

INTERCORRELACIONES SIMPLES. COEFICIENTES Y SIGNIFICANCIA ESTADISTICA

log x_i / log x_i	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1		0,855 ++	0,778 ++	0,913 ++	0,867 ++
X_2			0,768 ++	0,832 ++	0,867 ++
X_3				0,813 ++	0,823 ++
X_4					0,845 ++
X_5					

5.1. — *Cálculo de la función de producción*

Si bien sólo se considerará el proceso de cálculo de la función de producción final, que comprende a todas las variables cuestionadas, es de destacar que previamente se han ido obteniendo sucesivas funciones de producción, partiendo del caso más simple, y hasta encontrar esta última.

La función de producción a obtener responde a la forma general:

$$Y = a \cdot X_1^{b_1} \cdot X_2^{b_2} \cdot X_3^{b_3} \cdot X_4^{b_4} \cdot X_5^{b_5}$$

que para los efectos de su cálculo se transforma en:

$$\log Y = \log a + b_1 \log X_1 + b_2 \log X_2 + b_3 \log X_3 + b_4 \log X_4 + b_5 \log X_5$$

En el siguiente sistema de ecuaciones, los coeficientes de regresión parcial se obtuvieron por el método de la matriz inversa, calculada en base al procedimiento de partición de matrices. Para abreviar el cálculo, se utilizaron los valores de los desvíos correspondientes:

a) $E x_1 y = b_1 E x_1^2 + b_2 E x_1 x_2 + b_3 E x_1 x_3 + b_4 E x_1 x_4 + b_5 E x_1 x_5$

$E x_2 y = b_1 E x_1 x_2 + b_2 E x_2^2 + b_3 E x_2 x_3 + b_4 E x_2 x_4 + b_5 E x_2 x_5$

$$E\,x_3 y = b_1 E\,x_1 x_3 + b_2 E\,x_2 x_3 + b_3 E\,x_3^2 + b_4 E\,x_3 x_4 + b_5 E\,x_3 x_5$$

$$E\,x_4 y = b_1 E\,x_1 x_4 + b_2 E\,x_2 x_4 + b_3 E\,x_3 x_4 + b_4 E\,x_4^2 + b_5 E\,x_4 x_5$$

$$E\,x_5 y = b_1 E\,x_1 x_5 + b_2 E\,x_2 x_5 + b_3 E\,x_3 x_5 + b_4 x_4 x_5 + b_5 E\,x_5^2$$

b)

$$9{,}715188 = b_1\,9{,}575104 + b_2\,11{,}276403 + b_3\,8{,}432223 + b_4\,9{,}047447 + b_5\,7{,}943566$$

$$12{,}667370 = b_1\,11{,}276403 + b_2\,18{,}190875 + b_3\,11{,}501713 + b_4\,11{,}410128 + b_5\,10{,}965169$$

$$9{,}012489 = b_1\,8{,}432223 + b_2\,11{,}501713 + b_3\,12{,}340059 + b_4\,9{,}139561 + b_5\,8{,}677776$$

$$9{,}444488 = b_1\,9{,}047447 + b_2\,11{,}410128 + b_3\,9{,}139561 + b_4\,10{,}290364 + b_5\,8{,}059552$$

$$8{,}510216 = b_1\,7{,}943566 + b_2\,10{,}965169 + b_3\,8{,}677776 + b_4\,8{,}059552 + b_5\,8{,}782599$$

c) Resolución matricial

$$M = \left(\begin{array}{ccc:cc} E\,x_1^2 & E\,x_1 x_2 & E\,x_1 x_3 & E\,x_1 x_4 & E\,x_1 x_5 \\ & & E\,x_2 x_3 & E\,x_2 x_4 & E\,x_2 x_5 \\ E\,x_1 x_2 & E\,x_2^2 & & & E\,x_3 x_5 \\ & & \mathbf{A} & E\,x_3 x_4 & \mathbf{B} \\ E\,x_1 x_3 & E\,x_2 x_3 & E\,x_3^2 & & \\ \hdashline E\,x_1 x_4 & E\,x_2 x_4 & E\,x_3 x_4 & E\,x_4^2 & E\,x_4 x_5 \\ & & \mathbf{C} & & \mathbf{D} \\ E\,x_1 x_5 & E\,x_2 x_5 & E\,x_3 x_5 & E\,x_4 x_5 & E\,x_5^2 \end{array}\right)$$

y su inversa:

$$M^{-1} = \left(\begin{array}{c:c} X & Y \\ \hdashline Z & W \end{array}\right)$$

d) Reemplazando en M, se tiene

$$M = \left(\begin{array}{cccc|cc} 9{,}575104 & 11{,}276403 & 8{,}432223 & & 9{,}047447 & 7{,}943566 \\ 11{,}276403 & 18{,}190875 & 11{,}501713 & \mathbf{A} & 11{,}410128 & \mathbf{B}\ 10{,}965169 \\ 8{,}432223 & 11{,}501713 & 12{,}340059 & & 9{,}139561 & 8{,}677776 \\ \hline 9{,}047447 & 11{,}410128 & 9{,}139561 & & 10{,}290364 & 8{,}059552 \\ 7{,}943566 & 10{,}965169 & 8{,}677776 & \mathbf{C} & 8{,}059552 & \mathbf{D}\ 8{,}782599 \end{array}\right)$$

Siguiendo la simbología y el procedimiento de cálculo indicado por S. R. Searle [4], se tienen las siguientes etapas a resolver:

1) D^{-1}
2) $D^{-1}\ C$
3) $B\ D^{-1}\ C$
4) $A - B.D.^{-1}\ C$
5) $X = (A - B\ D^{-1}\ C)^{-1}$
6) $B\ D^{-1}$
7) $Y = -\ X\ B\ D^{-1}$
8) $Z = -\ D^{-1}\ C\ X$
9) $Z\ B\ D^{-1}$
10) $W = D^{-1} - Z\ B\ D^{-1}$;

que permiten la obtención de la matriz inversa, siendo ésta igual a:

$$M^{-1} = \left(\begin{array}{rrrrr} 0{,}805957 & -0{,}113528 & 0{,}036232 & -0{,}451358 & -0{,}208825 \\ -0{,}113527 & 0{,}274472 & -0{,}014512 & -0{,}052957 & -0{,}177065 \\ 0{,}036219 & -0{,}014510 & 0{,}306124 & -0{,}139646 & -0{,}188966 \\ -0{,}451353 & -0{,}052957 & -0{,}139653 & 0{,}701044 & -0{,}030987 \\ -0{,}208818 & -0{,}177066 & -0{,}188969 & -0{,}030989 & 0{,}738954 \end{array}\right)$$

Para su verificación, se multiplica por la mtriz M, dando como resultado la matriz identidad I: $M\ M^{-1} = I$.

O sea:

$$I = \left(\begin{array}{rrrrr} 0{,}999998 & 0{,}000000 & -0{,}000003 & -0{,}000045 & -0{,}000037 \\ 0{,}000002 & 1{,}000003 & 0{,}000000 & -0{,}000013 & -0{,}000010 \\ -0{,}000018 & -0{,}000002 & 0{,}999997 & -0{,}000022 & -0{,}000018 \\ 0{,}000009 & 0{,}000003 & 0{,}000004 & 1{,}000051 & 0{,}000042 \\ 0{,}000008 & -0{,}000001 & 0{,}000001 & 0{,}000041 & 1{,}000028 \end{array}\right)$$

Del producto entre la matriz M^{-1} y la matriz constituída por las sumatorias de xy, se obtienen los correspondientes coeficientes de regresión:

$$b_1 = 0{,}678472$$
$$b_2 = 0{,}236100$$
$$b_3 = -0{,}000016$$
$$b_4 = 0{,}042869$$
$$b_5 = 0{,}021235$$

Teniendo presente que las medidas de las variables utilizadas son las medias de sus logaritmos, para el cálculo del coeficiente a se procede así:

$$\log a = \bar{Y} - b_1 \bar{X}_1 - b_2 \bar{X}_2 - b_3 \bar{X}_3 - b_4 \bar{X}_4 - b_5 \bar{X}_5$$

$$\log a = 6{,}11461 - 0{,}67847\ (5.53453) - 0{,}23610\ (4{,}93288) + 0{,}00002\ (5{,}25690) - 0{,}04287\ (5{,}64365) - 0{,}02124\ (5{,}65427)$$

$$\log a = 0{,}875936$$

La función de producción, en su forma logaritmica, queda expresada como sigue:

$$\log y = 0{,}87594 + 0{,}67847 \cdot \log X_1 + 0{,}23610 \cdot \log X_2 - 0{,}00002 \cdot \log X_3 + 0{,}04287 \cdot \log X_4 + 0{,}02123 \cdot \log X_5$$

Siendo su expresión potencial la siguiente:

$$Y = 7{,}515 \cdot X_1^{0{,}67847} \cdot X_2^{0{,}23610} \cdot X_3^{-0{,}00002} \cdot X_4^{0{,}04287} \cdot X_5^{0{,}02123}$$

5.2. ELASTICIDAD

La elasticidad de producción del factor X_i de una función homogénea del tipo $Y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es:

$Ei = \frac{dY}{dx} : \frac{Y}{X}$, sea el cociente entre la producitividad marginal (P.marg.) y la productividad media (P. med.).

En una función del tipo de la Cobb - Douglas,

$$Y = a \cdot X_1^{b} \ldots X_n^{b},$$

las elasticidades correspondientes a cada uno de los factores son constantes e iguales al coeficiente de regresión, porque:

$$E_i = \frac{dy}{dxi} : \frac{Y}{Xi} \quad \text{por lo tanto,}$$

$$E_i = (a.x_1^{b_i} \cdot x_2^{b} \ldots b_i x_i^{b-1} \ldots x_n^{b}) : \frac{Y}{x_i}$$

$$E_i = (a.x_1^{b_1} x_2^{b_2} \ldots b_i x_i^{b_i} \cdot x^{-1} \ldots x_n^{b}) : \frac{Y}{x_i}$$

$$E_i = (a.x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2} \ldots b_i x_i^{b} \cdot \frac{1}{x} \ldots x_n^{b}) : \frac{Y}{x_i}$$

$$E_i = \underbrace{(a.x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2} \ldots x_i^{b_i} \ldots x_n^{b} \cdot b_i \frac{1}{x_i})}_{Y} : \frac{Y}{x_i}$$

$$E_i = (b_i \cdot \frac{Y}{x_i}) : \frac{Y}{x_i}$$

$$E_i = b_i \frac{Y / x_i}{Y / x_i}, \text{ simplicando nos queda:}$$

$$E_i = b_i$$

De tal manera, las elasticidades parciales de cada uno de los recursos, en la función obtenida, son iguales a:

$$E_{x_1} = \frac{dy}{dx_1} : \frac{Y}{X_1} = b_1 ; \quad E_{x_2} = \frac{dy}{dx_2} : \frac{Y}{X_2} = b_2$$

$$E_{x_3} = \frac{dy}{dx_3} : \frac{Y}{X_3} = b_3 ; \quad E_{x_4} = \frac{dy}{dx_4} : \frac{Y}{X_4} b_4$$

$$E_{x_5} = \frac{dy}{dx_5} : \frac{Y}{X_5} = b_5$$

y por lo tanto, sus productividades marginales parciales son iguales a:

$$\frac{dy}{dx_1} = b_1 \frac{Y}{X_1} \; ; \; \ldots \; ; \; \frac{dy}{dx_5} = b_5 \frac{Y}{X_5}$$

La elasticidad total de la función es igual a E = 0,97866, siendo las elasticidades parciales los coeficientes de regresión de cada variable.

5.3. *Cálculo de los coeficientes de correlación múltiple y parciales* [6]

La fórmula utilizada para el cálculo del coeficiente de correlación múltiple es la siguiente:

$$R = \sqrt{r_1 b_1' + r_2 b_2' + \ldots + r_n b_n'}$$

Siendo cada uno de los "r" igual al coeficiente de correlación simple que se calcula según la fórmula,

$$ryxi = \frac{EX_i Y - \frac{E\,Xi.\;E\,Y}{N}}{\sqrt{\left(EX_i^2 - \frac{(EX_i)^2}{N}\right)\left(EY^2 - \frac{(EY)^2}{N}\right)}}$$

Los coeficientes b son valores abstractos; por lo tanto,

$$b_i' = b_i$$

El coeficiente de correlación múltiple corregido se calcula según la fórmula:

$$\bar{R}^2 = 1 - (1 - R^2) \cdot \frac{N-1}{N-K}$$; siendo k = nº de variables independientes y N = nº de observaciones

y F se calcula mediante la fórmula:

$$F = \left(\frac{\bar{R}^2}{1-R^2}\right) \cdot \left(\frac{N-K-1}{k}\right)$$

Siguiendo la metodología descripta, el coeficiente de correlación múltiple corregido es igual a:

$\bar{R}$ = 0,8989 y el valor de F = 30,40 que es altamente significativo, para grados de libertad: 5 y 36

El coeficiente de determinación $\bar{R}^2$ es igual a 0,8085, el cual está indicando que aproximadamente el 81% de la variación sufrida por

la variable dependiente (Y) está explicada por las variaciones de los factores productivos considerados o variables independientes.

A los efectos de conocer el verdadero comportamiento de las variables independientes considerados en la función de producción, se procedió a calcular los coeficientes de correlación parcial; para ello, se utilizó el método abreviado de DOOLITLE. [7] y [8] La matriz de correlación utilizada es la siguiente:

	1	2	3	4	5	6
1	1,0000	r_{yx_1}	r_{yx_2}	r_{yx_3}	r_{yx_4}	r_{yx_5}
2		1,0000	$r_{x_1x_2}$	$r_{x_1x_3}$	$r_{x_1x_4}$	$r_{x_1x_5}$
3			1,0000	$r_{x_2x_3}$	$r_{x_2x_4}$	$r_{x_2x_5}$
4				1,0000	$r_{x_3x_4}$	$r_{x_3x_5}$
5					1,0000	$r_{x_4x_5}$
6						1,0000

y los coeficientes obtenidos son:

$$r_{Y1.2345} = 0{,}368 \quad (++)$$
$$r_{Y2.1345} = 0{,}241$$
$$r_{Y3.1245} = 0{,}033$$
$$r_{Y4.1235} = 0{,}061$$
$$r_{Y5.1234} = 0{,}018$$
$$r_{12.Y345} = 0{,}129$$
$$r_{13.Y245} = -0{,}069$$
$$r_{14.Y235} = 0{,}540 \quad (++)$$
$$r_{15.Y234} = 0{,}253$$
$$r_{23.Y145} = 0{,}069$$
$$r_{24.Y135} = 0{,}089$$

$$r_{25.Y134} = 0{,}382 \quad (++)$$
$$r_{34.Y125} = 0{,}314 \quad (+)$$
$$r_{35.Y124} = 0{,}356 \quad (+)$$
$$r_{45.Y123} = 0{,}058$$

De la comparación de los diferentes coeficientes de correlación simple total de los cuadros nº 5 y 6 con los correspondientes coeficientes de correlación parcial, se saca como conclusión, que la relación E. Bruta con mano de obra, es la única que se mantiene altamente significativa, una vez eliminada la influencia de los demás factores. Es decir, que el efecto de causalidad es consecuencia directa de la presencia del recurso mano de obra y es una demostración de la influencia notable que tiene este recurso en la variación de la producción.

Del análisis de las intercorrelaciones entre las variables independientes se comprueba la existencia de coeficientes de correlación altamente significativos entre el recurso mano de obra y superficie, gastos de cultivo con gastos de capital. Además, hay relaciones significativas entre superficie y gastos de equipo, y gastos de capital y gastos de equipo. Todas las intercorrelaciones significativas citadas son perfectamente lógicas y por lo tanto no necesitan ser explicadas.

5.4. *Productividad marginal*

Ya se ha visto, cuando se desarrolló el concepto de elasticidad (5.2), cómo es posible deducir de la misma, la productividad marginal de cada uno de los recursos que conforman la función de producción, o sea su derivada parcial, que por conveniencia de cálculo puede expresarse así:

$$Y' = b_1 \frac{Y}{x_1} + b_2 \frac{Y}{x_2} + \ldots + b_n \frac{Y}{x_n}$$

de tal manera, las productividades marginales de cada una de las variables son, por lo ya visto, y respecto a los valores medios observados, tanto de Y, como de x_1 a x_5, igual a:

a) $$\frac{dy}{dx_1} = b_1 \frac{Y}{x_1} = 2{,}91$$

b) $$\frac{dy}{dx_2} = b_2 \frac{Y}{x_2} = 1{,}44$$

$$c) \quad \frac{dy}{dy_3} = b_3 \frac{Y}{x_3} = -0{,}53$$

$$d) \quad \frac{dy}{dx_4} = b_4 \frac{Y}{x_4} = 0{,}13$$

$$e) \quad \frac{dy}{dx_5} = b_5 \frac{Y}{x_5} = 0{,}69$$

De acuerdo a los valores obtenidos de productividad marginal, para cada una de las variables independientes o recursos productivcs considerados en la función de producción, pueden observarse distintos comportamientos.

Las productividades marginales positivas y mayores que la unidad corresponden a los recursos: mano de obra (X_1) y gastos de cultivo (X_2). Positiva y menor que la unidad, a gastoss de capital (X_5) y superficie (X_4). En cambio, negativa, a gastos de equipo (X_3).

En la situación ideal de un predio, conformado con los valores medios observados de los recursos productivos considerados en la función de producción, éste no estaría trabajando, desde el punto de vista del óptimo. con la máxima eficiencia.

El máximo beneficio económico se obtiene cuando todos los recursos productivos trabajan en el óptimo económico y ésto se consigue cuando el valor económico del último incremento aplicado, de cada una de los recursos productivos, se iguala al valor del último incremento de producto obtenido. Simbólicamente se puede representar lo expresado como sigue:

$$\frac{dy}{dx_i} = \frac{Px_i}{Py} \qquad (5.4.1.)$$

En otras palabras, la igualdad expresada indica el momento en que se produce la intersección de la derivada de la función producto con la derivada de la función costo; en ese instante, ambas valen igual, y su cociente es la unidad:

$$\frac{\frac{dy}{dx_i}}{\frac{dPx_i}{dPy}} = 1 \qquad (5.4.2)$$

Para la situación ideal planteada, los recursos mano de obra y gastos de cultivo podrían mejorar su productividad, si se aumentara individualmente la escala de operaciones, es decir, si se incrementara su uso hasta alcanzar el equilibrio ideal ya visto en (5.4.1). De esta forma aumentaría el beneficio económico. Lo mismo puede decirse respecto a los recursos gastos de equipo, gastos de capital y superficie, pero en sentido contrario, es decir, disminuir la intensidad en el uso de estos recursos hasta invertir la situación de "uso a pérdida", hasta alcanzar la situación de equilibrio de (5.4.1). El caso particular de la variable gastos de equipo (X_5), con un coeficiente de regresión muy cercano a cero, merece una consideración especial, que se hará más adelante.

De acuerdo al concepto de productividad marginal y de equilibrio económico en el óptimo, en la situación ideal promedio, el valor de productividad marginal encontrada, para el recurso mano de obra, igual a 2,91, indica que por cada unidad de recurso invertida, se obtiene un valor de producto casi tres veces el valor de la unidad de recurso. Respecto a los demás insumos puede hacerse el mismo razonamiento, pero adecuado a cada situación particular.

A continuación se verá cuál sería el máximo beneficio a obtener en la situación teórica promedio planteada.

Este dato servirá de comparación respecto al máximo beneficio (B_0) en el óptimo que se deducirá posteriormente.

$$B_0 \text{ promedio} = \overline{Y} - (\overline{X}_1 + \overline{X}_2 + \overline{X}_3 + \overline{X}_4 + \overline{X}_5)$$

B_0 promedio = \$ 1.301.968 − (\$ 342.358 + \$ 85.675 + \$ 180.675 + \$ 278.766 + \$ 451.147)

B_0 promedio = − 36.653 m\$n.

De acuerdo al valor obtenido, un predio trabajando en función de los valores promedios de los recursos considerados tendría, al final del ejercicio, un beneficio negativo. Es necesario recordar que la media de X_4 (superficie) dada en m\$n corresponde a un predio de una superficie de 34,70 ha. Se verá más adelante cómo cambia esta situación cuando los recursos trabajan en el óptimo y de acuerdo a una reestructuración de los mismos en cuanto a las proporciones.

Expresando la ecuación de beneficio en valores porcentuales:

$$\begin{array}{ll} \text{Suma gastos} & X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = \text{m\$n } 1.338{,}621 \\ \text{en \% promedio} & = 21{,}58 + 6{,}40 + 13{,}50 + 20{,}82 + 33{,}70 = 100\% \end{array}$$

5.5 OPTIMO ECONOMICO Y MAXIMO BENEFICIO [3]

El máximo Beneficio se obtiene cuando:

$$B_0 = Y - (X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5) = \text{máximo}$$

Diferenciando la ecuación, se tiene:

$$dB_o = dY - (dX_1 + dX_2 + dX_3 + dX_4 + dX_5) \qquad (5.5.1)$$

Si (5.5.1) se iguala a cero, se tiene que:

$$dY = dX_1 + dX_2 + dX_3 + dX_4 + dX_5 \qquad (5.5.2)$$

Diferenciando la función de producción, se obtiene:

$$dy = \frac{dy}{dx_1} dx_1 + \frac{dy}{dx_2} dx_2 + \frac{dy}{dx_3} dx_3 + \frac{dy}{dx_4} dx_4 + \frac{dy}{dx_5} dx_5 \qquad (5.5.3)$$

e igualando las ecuaciones (5.5.2) y (5.5.3); resolviendo, se tiene:

$$\frac{dy}{dy} = \frac{\frac{dy}{dx_1}}{\frac{dy}{dx_1}} dx_1 + \frac{\frac{dy}{dx_2}}{\frac{dy}{dx_2}} dx_2 + \frac{\frac{dy}{dx_3}}{\frac{dy}{dx_3}} dx_3 + \frac{\frac{dy}{dx_4}}{\frac{dy}{dx_4}} dx_4 + \frac{\frac{dy}{dx_5}}{\frac{dy}{dx_5}} dx_5$$

$$1 = \frac{dy}{dx_1} + \frac{dy}{dx_2} + \frac{dy}{dx_3} + \frac{dy}{dx_4} + \frac{dy}{dx_5}$$

En el óptimo, las productividades marginales parciales, o sea, sus derivadas parciales, deben ser iguales entre sí, por lo tanto:

$$\frac{dy}{dx_1} = \frac{dy}{dx_2} = \frac{dy}{dx_3} = \frac{dy}{dx_4} = \frac{dy}{dx_5} = 1 \qquad (5.5.4)$$

La deducción realizada ha permitido obtener las cinco ecuaciones básicas (5.5.4). Estas y la función de producción, permiten calcular el máximo beneficio empresarial. Para calcularlo, se procede así:

Partiendo de la función de producción, que es igual a:

$$\log Y = a + b_1 \log X_1 + b_2 \log X_2 + b_3 \log X_3 + b_4 \log X_4 + b_5 \log X_5$$

y reemplazando en la misma cada una de las incógnitas logarítmicas, por las correspondientes ecuaciones en el óptimo (5.5.4) y resolviendo, es posible calcular el valor del log Y, igual a la producción óptima cuando todos los recursos trabajan con la máxima eficiencia económica.

Para el caso particular que se está analizando, el proceso matemático de cálculo sería el siguiente:

$$\log Y = 0{,}87594 + 0{,}67847 \log X_1 + 0{,}23610 \log X_2 - 0{,}00002 \log X_3 + 0{,}04287 \log X_4 + 0{,}01223 \log X_5$$

reemplazando cada una de las incógnitas, excepto X_1 (mano de obra) que se deja como variable y X_3 que se desprecia, dado que el valor de su coeficiente es prácticamente cero, se tiene:

$$\log Y = 0{,}87594 + 0{,}67847 \log X_1 + 0{,}23610 \log (0{,}23610\ Y) + 0{,}04287 \log (0{,}04287\ Y) + 0{,}02123 \log (0{,}02123\ Y)$$

$$\log Y = 0{,}87594 + 0{,}67847 \log X_1 + 0{,}23610 (\log 0{,}23610 + \log Y) + 0{,}04287 (\log 0{,}04287 + \log Y) + 0{,}02123 (\log 0{,}02123 + \log Y),$$

que da lugar a: $\log Y = 0{,}67847 \log X_1 + 0{,}63378 + 0{,}30021 \log Y$

$$1{,}00000 \log Y - 0{,}30021 \log Y = 0{,}67847 \log X_1 + 0{,}63378$$

$$0{,}69979 \log Y = 0{,}67847 \log X_1 + 0{,}63378$$

$$\log Y = \frac{0{,}67847 \log X_1 + 0{,}63378}{0{,}69979}$$

Despejado el log Y, se está en situación de calcular el óptimo de producción, con sólo dar un valor a la variable X_1 (mano de obra). Si suponemos que una unidad económica de producción familiar debe absorber la mano de obra de una familia tipo rural, constituida generalmente de seis miembros, es interesante averiguar qué superficie le correspondería a dicha unidad económica. Además, cuál sería el beneficio económico total y por unidad de trabajo a obtener, cuando todos los recursos trabajan en el óptimo. Es por ello que se ha elegido como valor, para reemplazar a la variable X_1, en la ecuación en el óptimo, a la media observada en la muestra, igual a m$n 342.358, equivalente a 1.711 jornadas/predio y año:

$$\log Y = \frac{0{,}67847\ (5{,}53453) + 0{,}63378}{0{,}69979}$$

$$\log Y = 6{,}27158$$

$$\text{antilog } Y = \text{m\$n } 1.868.000$$

este valor correspondería a la entrada bruta a obtener por predio, cuando todos los recursos considerados se utilizaron, teóricamente, a un nivel de uso de máxima eficiencia.

Calculado el valor de Y, se está en condiciones de obtener el óptimo para cada una de las restantes variables, recordando que el valor de la variable X_1 ha sido prefijado.

a) Nivel óptimo económico de gastos de cultivo (X_2)

$X_2 = b_2 \cdot Y$

$X_2 = 0{,}2361 \cdot$ m\$n 1.868.000

X_2op. = 441.035 m\$n / predio

b) Nivel óptimo económico de superficie (X_1)

$X_4 = b_4 \cdot Y$

$X_4 = 0{,}04287$ (m\$n 1.868.000)

X_4op. = 80.137 m\$n/predio, valor que corresponde a un predio de 10,07 Has. de superficie.

c) Nivel óptimo económico de gastos de capital (X_5)

$X_5 = b_5 \cdot Y$

$X_5 = 0{,}02123$ (m\$n 1.868.000)

X_5op. = 39.676 m\$n/predio

d) Nivel óptimo económico de gastos de equipo (X_3)

$X_3 = b_3 \cdot Y$

$X_3 = -0{,}00002$ (m\$n 1.868.000)

X_3op. = -29,88 m\$n

Como puede observarse, el nivel económico óptimo para el recurso gastos de equipo estaría dado por un valor negativo, lo que no debe sorprender, ya que, desde que se obtuvieron los distintos coeficientes de regresión, se sabía que debía eliminarse desde el punto de vista teórico, a la variable señalada por el coeficiente negativo. De esta manera, es posible llegar, por un proceso de deducción matemático, a obtener el óptimo económico.

No obstante, como desde un punto de vista técnico no es factible desligarse de la presencia de equipos mecánicos y de tracción a sangre, y por lo tanto, de los gastos que de su uso se derivan, es que, se ha incluido en la ecuación de beneficio una cantidad de gastos de equipo indispensable y proporcional a la superficie obtenida para el óptimo.

Máximo Beneficio = $Y - (X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5)$. Reemplazando por los valores en el óptimo, tenemos:

$$B_o = 1.868.000 - (342.358 + 441.035 + 32.027 + 80.137 + 39.676)$$

$$B_o = 964.764 \text{ m\$n / predio.}$$

El valor de beneficio máximo calculado es positivo y muy superior, comparativamente, al obtenido para el predio promedio. Se puede inferir que el cambio operado es consecuencia de un reordenamiento, en cuanto a proporciones, de los recursos que participan en la función de producción. Reordenamiento que a su vez, es una función de la productividad marginal de cada uno de los recursos.

Numéricamente, es posible comprobar esta afirmación comparando las proporciones en que están combinados los recursos productivos, en la situación promedio y óptima.

Variables	X_1		X_2		X_3		X_4		X_5	
Estructura de costo predio promedio %	25,58	+	6,40	+	13,50	+	20,82	+	33,70	100%
Estructura de costo en el óptimo %	36,61	+	47,16	+	8,57	+	3,42	+	4,24	100%

La nueva estructura de costos, como era de esperar, pone énfasis en una mayor participación de los recursos mano de obra y gastos de cultivo y una disminución en los restantes recursos.

El aumento más significativo corresponde al recurso gastos de cultivo (X_2), rubro éste constituido fundamentalmente por gastos en: fertilizantes y plaguicidas. Siguiéndole en orden de importancia el correspondiente a la mano de obra.

Entre las disminuciones más notables están las referidas al recurso tierra y gastos de capital, siendo el primero como ya se ha visto, el recurso de más baja productividad marginal.

Si se considera que la mayor parte de los gastos de capital son consecuencia de las inversiones realizadas en tierra y cultivos permanentes, es posible sumar a ambas variables y considerarlas como si fueran una, y observar que su incidencia en la ecuación de costo es igual, en el caso promedio, a un 54,52%, y en el óptimo igual a un 7,66%.

Todo lo cual está indicando un uso desproporcionado del recurso capital en la estructura de costos promedio, en desmedro de los recursos de más alta productividad, como lo son los gastos de cultivo y mano de obra.

Respecto al recurso gastos de equipo, es necesario hacer una consideración aclaratoria. Durante el estudio de diagnóstico realizado en el área, [1] fue posible observar la existencia de un elevado número de unidades de tracción totales ociosas, como consecuencia de la presencia simultánea, en la mayoría de los predios, de equipo de tracción a sangre y mecánica, lo cual disminuía considerablemente la eficiencia de este rubro. La aclaración hecha explica, en parte, el comportamiento de esta variable en la función de producción hallada.

El tamaño óptimo deducido que, correspondería a un predio de una superficie calculada de 10,07 ha, sería el indicado para absorber la totalidad de la mano de obra de una familia tipo rural.

Cada hectárea debería absorber aproximadamente 170 jornadas anuales, o sean 0,57 E. H.; este último valor, multiplicado por la

superficie óptima calculada, da un total de 5,7 E. H., algo inferior a las disponibilidades contempladas.

Fijada como constante, la cantidad de mano de obra disponible, para atender la superficie óptima calculada; es conveniente determinar si el beneficio económico a obtener puede satisfacer, decorosamente, las necesidades del núcleo familiar. Para ello, es necesario calcular el máximo beneficio económico, que es:

B_o = 964.764 m$n / predio.

Expresado este beneficio por unidad de trabajo, se tiene:

964,764 m$n ÷ 1.711 jornadas = 564 m$n / jornada.

Este beneficio por unidad de trabajo es 2,82 veces superior al jornal medio pagado en la zona, en el ciclo agrícola considerado.

Queda por averiguar si con la superficie óptima calculada es posible obtener el ingreso óptimo estimado.

Uno de los supuestos que se pueden hacer es que, el predio óptimo se dedique exclusivamente a la producción de uva para vinificar. En ese caso, hay que estimar a cuántos quintales de uva corresponde la entrada bruta calculada; para ello hay que dividir a esta última por el precio promedio pagado por quintales.

1.868.000 m$n/predio: 462 m$n/qq = 4.043 qq/predio; que expresado por unidad de superficie es igual a:

4.043 qq/predio: 10,07 ha = 401 qq/ha

Un rendimiento como el calculado puede parecer exagerado si se lo compara con los rendimientos predominantes en la zona, pero no imposible de alcanzar. Lo importante es destacar que un reordenamiento de los elementos que componen un costo puede cambiar significativamente el resultado económico de una empresa vitícola. Esto se consigue combinando adecuadamente los recursos productivos en función de su productividad potencial.

La nueva reestructuración de gastos, por predio, aumenta significativamente los gastos en efectivo por unidad de superficie, respecto a la situación promedio, lo cual está indicando que el productor familiar debe disponer de una cantidad de capital circulante muy superior a sus reales disponibilidades financieras. Es decir, que ante la hipotética posibilidad de que se formulare un plan de política agraria que tendiere a fomentar las explotaciones agropecuarias de tipo familiar, debería previamente estudiarse las reales posibilidades financieras del Estado para asistir al productor en forma permanente, con el objeto de que éste obtenga de sus escasos recursos productivos, la máxima productividad.

El ejemplo desarrollado, de una empresa vitícola, es una de las tantas hipótesis de explotación que se pueden formular, para alcanzar la más alta remuneración de los factores de producción. Pero

como el objetivo de este trabajo es otro y la metodología aplicada no es la más adecuada para proponer planes de explotación. Se dejará para más adelante el tratamiento en especial de este tema que tiene singular importancia.

La metodología aplicada, ni ninguna otra de las conocidas, podría reflejar fielmente el fenómeno de la producción, tal cual se manifiesta, pero todas, con mayor o menor aproximación, se acercarán a la realidad. La elección del método de cálculo y análisis depende del grado de aproximación que se busque. Cuanto mayores sean las exigencias, más complicados serán los modelos matemáticos que deberán elaborarse y también mayores serán los riesgos de introducir subjetividades.

De acuerdo a los objetivos que se persiguen con este trabajo, la metodología aplicada ha sido de gran utilidad, porque ha permitido conocer, más ítimamente, el proceso productivo de las empresas agrícolas, e introducirse en el complejo tema de la optimización de los recursos productivos. Se han obtenido conclusiones que se creen, serán de utilidad para futuras investigaciones sobre el tema.

No se ignora, como ya se ha insinuado, que otras técnicas distintas a la utilizada, como ser, la programación lineal, son más adecuadas para determinar el tamaño que da la más alta rentabilidad empresarial, pero tampoco se ignora que la aplicación de la programación lineal exige un conocimiento previo riguroso de la realidad en que se desarrolla el fenómeno.

Para finalizar, es necesario destacar que el camino correcto a seguir, aplicando el método descripto, hubiera sido el de la estratificación previa de la muestra. De esta manera, se contemplarían las distintas situaciones que se dan en el área, en cuanto a tamaño de la empresa. Esto no pudo hacerse, debido a las limitaciones impuestas por el tamaño de la muestra utilizada.

6 – CONCLUSIONES

6.1 – Respecto a la aplicabilidad de la función de Cobb-Douglas, en la determinación del tamaño óptimo de la empresa agraria del área de San Rafael.

a) Se ha comprobado que es de utilidad, para el caso planteado, porque ha permitido alcanzar soluciones aceptables. No obstante, tiene algunas limitaciones, que se deben destacar.

a) La deducción del tamaño óptimo de un recurso, precedido por un coeficiente negativo, es imposible de determinar, por razones comprensibles del cálculo.

b) La determinación de la producción óptima, en función de la optimización de todas las variables, que conforman una

función de producción, puede conducir a obtener resultados ilógicos, que caen fuera de un intervalo de producción real. Este inconveniente se debe a la particularidad de que la función de Cobb-Douglas es monótona creciente.

c) Por ello, se infiere que la aplicación de la programación lineal es más adecuada para determinar el tamaño con el más alto beneficio económico. Teniendo además este método la ventaja de permitir trabajar con valores actualizados; en cambio, utilizando funciones de producción, los resultados que de ellas se obtengan, siempre tendrán carácter histórico.

6.2 – El análisis practicado, a partir de la función de producción calculada, ha permitido sacar las siguientes conclusiones:

a) Se ha demostrado la utilización inadecuada de los recursos productivos, disponibles en el área estudiada y como consecuencia, el resultado económico promedio que se obtiene, está muy lejos de lo que razonablemente puede esperarse, si se usaran los recursos más eficientemente.

b) En la combinación de insumos, en la situación promedio observada, predomina netamente el recurso capital y los gastos que de él se derivan, en detrimento de los recursos gastos de cultivo y mano de obra, que demostraron tener los más altos índices de productividad marginal.

c) La sustitución de recursos, permite ir mejorando progresivamente el beneficio económico final, hasta alcanzar el máximo, cuando todos los recursos son utilizados en el óptimo.

d) La superficie óptima calculada, de 10,07 ha, puede ser considerada aceptable para una empresa dedicada a la producción vitícola y explotada por una familia rural tipo, y de acuerdo a una combinación de recursos que tenga en cuenta la gravitación de los mismos en la estructura de costos, a fin de conseguir un beneficio lo suficientemente alto para posibilitar el sostenimiento decoroso del núcleo familiar y su capitalización futura.

e) Mediante una estratificación previa de la muestra se hubiera podido lograr una mejor aproximación en la determinación del tamaño óptimo.

7 – RESUMEN

Se ha comprobado que la aplicación de la función de Coob-Douglas, en la determinación del tamaño óptimo de la empresa agraria del área de San Rafael, ha permitido, en este caso, alcanzar soluciones aceptables.

No obstante, la determinación de la producción óptima, en función de la optimización de las variables, que conforman la función calculada, no siempre conduce a resultados aceptables de acuerdo a la realidad.

El análisis marginal practicado, a partir de la función calculada, ha demostrado que los recursos productivos disponibles por las empresas agrarias no son utilizados eficientemente, y ha indicado que una adecuada recombinación de recursos conduciría a la obtención de mejores resultados económicos.

La superficie óptima calculada, 10,7 ha, para una empresa vitícola, explotada por una familia rural tipo, puede ser aceptable, considerando la gran gravitación del recurso tierra en la estructura de costos y a lo observado en la realidad.

BIBLIOGRAFIA

ALLEN, R. C., 1959, *Análisis Matemático para Economistas.* Ed. Aguilar, Madrid. (5)

BLALOCK, H. M., 1960, *Social Statisties.* Mc Craw--Hills, New York. (6)

Dirección de Estadísticas e Inv. Económicas, 1971, *Anuario Estadístico* 1969-70. Mendoza. (2)

GÓMEZ MANZANARES, E., 1964, *Funciones de Producción en la Agricultura. Aplicaciones en la zona de la Violada.* Revistas de Estudios Agro-Sociales. Publicación trimestral del Instituto de Estudios Agro-Socales, Madrid. (3)

GOULDEN, C. H., 1952, *Methods of statistical analysis.* J. Wiley, New York. (7)

HERNÁNDEZ, L. H. y E. MAVRICH, 1967, *Análisis económico de la empresa agraria. Area de San Rafael. Mendoza. Argentina.* Instituto Interamericano de Ciencias Agrícolas de la O.E.A., Zona Sur, Montevideo. (1)

McNEMAR, G. 1957, *Psychological Statistics.* J. Wiley, New York. (8)

SEARLE, S. R., 1966, *Matrix algebra for the biological sciences.* J. Wiley and Sous, New York. (4)